1

(ここには 1 の解答を記入すること。)

試行 (※) を 1 回行うとき，事象 A，B を

A：点 P が正の向きに 1 だけ進む，

B：点 P が負の向きに 2 だけ進む

により定めると，

A が生じる確率は $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{6}=\frac{3}{4}$，

B が生じる確率は $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

(1) A が 2 回，B が 1 回生じるときであるから，確率は，

$${}_3C_2\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^1=\frac{27}{64} \quad \cdots(答)$$

(2) A が 4 回，B が 2 回生じるときであるから，確率は，

$${}_6C_4\left(\frac{3}{4}\right)^4\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1215}{4096} \quad \cdots(答)$$

(3) 試行 (※) を n 回繰り返すとき，A が a 回，B が b 回生じるとする。(a，b は 0 以上の整数)

このとき，P の座標を p とすると，

$$\begin{aligned} p &= 1\cdot a+(-2)\cdot b \\ &= (n-b)-2b \quad (a+b=n \text{ より}) \\ &= n-3b \end{aligned}$$

n は 3 で割り切れない整数だから，p = 0 となることはない。

したがって，求める確率は，

$$0 \quad \cdots(答)$$

2 (ここには 2 の解答を記入すること。)

(1) $x_{n+1}=(x_n)^5\cdot(y_n)^2$ より $\log_2 x_{n+1}=5\log_2 x_n+2\log_2 y_n \rightleftarrows a_{n+1}=5a_n+2b_n$ …①

$y_{n+1}=x_n\cdot(y_n)^6$ より $\log_2 y_{n+1}=\log_2 x_n+6\log_2 y_n \rightleftarrows b_{n+1}=a_n+6b_n$ …②

①+②×k より $a_{n+1}+kb_{n+1}=(k+5)a_n+(6k+2)b_n$ …③

$\{a_n+kb_n\}$ が等比数列になるとき $(k+5)\cdot k=6k+2$ が成り立つ。このkの2次方程式より

$k^2-k-2=0 \rightleftarrows (k-2)(k+1)=0$ ∴ $k=-1, 2$ …[答]

(2) $k=-1$ のとき③は $a_{n+1}-b_{n+1}=4(a_n-b_n)$ となり, $\{a_n-b_n\}$ は,

初項 $a_1-b_1=\log_2 x_1-\log_2 y_1=\log_2 2-\log_2\frac{1}{2}=1-(-1)=2$, 公比4の等比数列.

よって, $a_n-b_n=2\cdot4^{n-1}$ …④

また, $k=2$ のとき③は $a_{n+1}+2b_{n+1}=7(a_n+2b_n)$ となり, $\{a_n+2b_n\}$ は

初項 $a_1+2b_1=\log_2 x_1+2\log_2 y_1=\log_2 2+2\log_2\frac{1}{2}=1+(-2)=-1$, 公比7の等比数列,

よって, $a_n+2b_n=-7^{n-1}$ …⑤

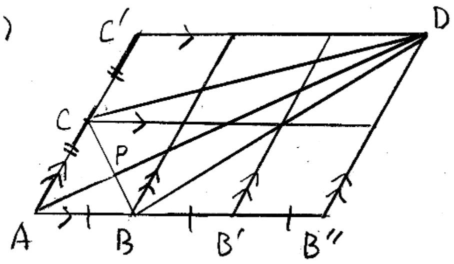
(④×2+⑤)÷3 より $a_n=\dfrac{4^n-7^{n-1}}{3}$, (⑤−④)÷3 より $b_n=\dfrac{-2\cdot4^{n-1}-7^{n-1}}{3}$

$x_n=2^{a_n}$ より, $x_n=2^{\frac{4^n-7^{n-1}}{3}}$ …[答]

3

（ここには 3 の解答を記入すること。）

(1)



$\overrightarrow{AB'}=2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AB''}=3\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC'}=2\overrightarrow{AC}$ と定めると、線分ADは、2線分AB''，AC'を隣り合う2辺とする平行四辺形AB''DC'の対角線である。

三角形ABCの面積をSとしたとき、

(四角形ABDCの面積) = (平行四辺形AB''DC'の面積) − (三角形CDC'の面積) − (三角形BB''Dの面積)

$= (2S\cdot 6) - \frac{1}{2}(2S\cdot 3) - \frac{1}{2}(2S\cdot 4) = 5S$

したがって、四角錐OABDCの体積は $5V$ …[答]

(2) $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} \iff \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = 3(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + 2(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA})$

$\iff \overrightarrow{OD} = -4\vec{a} + 3\vec{b} + 2\vec{c}$ …[答]

(3) 点Pは線分AD上の点なので $\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AD}$ $(0 \leqq k \leqq 1)$ と表すことができ、これより

$\overrightarrow{AP} = 3k\overrightarrow{AB} + 2k\overrightarrow{AC}$

一方、点Pは線分BC上の点なので $3k+2k=1$ が成り立ち、これより $k=\frac{1}{5}$ ($0\leqq k \leqq 1$を満たしている)

これより $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$ が得られ、点Pは線分BCを2：3に内分する点とわかる。したがって、

$\overrightarrow{OP} = \frac{3}{5}\vec{b} + \frac{2}{5}\vec{c}$ …[答]

(4) (2)より

$|\overrightarrow{OD}|^2 = |-4\vec{a}+3\vec{b}+2\vec{c}|^2 = 16|\vec{a}|^2 + 9|\vec{b}|^2 + 4|\vec{c}|^2 - 24\vec{a}\cdot\vec{b} + 12\vec{b}\cdot\vec{c} - 16\vec{c}\cdot\vec{a}$

四面体OABCが1辺の長さ1の正四面体であるとき、$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$,

$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{a} = 1\cdot 1\cdot \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ であるから、

$|\overrightarrow{OD}|^2 = 16+9+4-12+6-8 = 15$

$|\overrightarrow{OD}| > 0$ より $|\overrightarrow{OD}| = \sqrt{15}$ …[答]

4

（ここには $\boxed{4}$ の解答を記入すること。）

$$x(x-2)^2 = kx^2 \iff x\{x^2-(k+4)x+4\} = 0$$

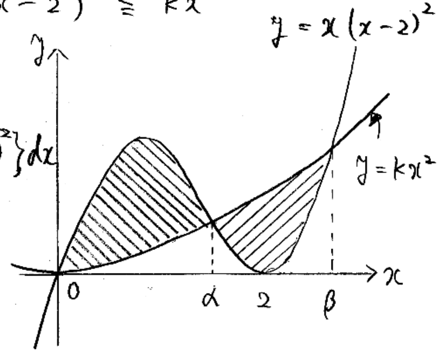
$$\iff x=0 \text{ または } x^2-(k+4)x+4=0$$

$f(x) = x^2-(k+4)x+4$ とすると，$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線であり，$f(0)=4>0$，$f(2)=-2k<0$ より，$f(x)=0$ は $0<x<2$ と $2<x$ の範囲に解を1つずつもつ。

それらを α，β $(0<\alpha<2,\ 2<\beta)$ とすると，

$$x(x-2)^2 - kx^2 = x(x-\alpha)(x-\beta) \quad \cdots (*)$$

$$\begin{cases} 0 \leqq x \leqq \alpha \text{ のとき } (*) \geqq 0 \text{ より } x(x-2)^2 \geqq kx^2, \\ \alpha \leqq x \leqq \beta \text{ のとき } (*) \leqq 0 \text{ より } x(x-2)^2 \leqq kx^2 \end{cases}$$



題意より，

$$\int_0^\alpha \{x(x-2)^2-kx^2\}dx = \int_\alpha^\beta \{kx^2-x(x-2)^2\}dx$$

$$\int_0^\beta \{x(x-2)^2-kx^2\}dx = 0$$

$$\int_0^\beta \{x^3-(k+4)x^2+4x\}dx = 0$$

$$\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}(k+4)x^3+2x^2\right]_0^\beta = 0$$

$$\frac{1}{4}\beta^4-\frac{1}{3}(k+4)\beta^3+2\beta^2=0$$

$\beta \neq 0$ より，

$$\frac{1}{4}\beta^2-\frac{1}{3}(k+4)\beta+2=0 \quad \cdots ①$$

また，$f(\beta)=0$ より，

$$\beta^2-(k+4)\beta+4=0 \quad \cdots ②$$

② − ① × 3 より　$\frac{1}{4}\beta^2-2=0$ であり，$2<\beta$ より，

$$\beta = 2\sqrt{2}$$

これを ② に代入することにより，

$$k = 3\sqrt{2}-4 \quad \cdots (答)$$

（$k>0$ を満たす）