1

(ここには 1 の解答を記入すること。)

試行(＊)を1回行うとき，事象 A，B を

A：点 P が正の向きに 1 だけ進む，

B：点 P が負の向きに 2 だけ進む

により定めると，

A が生じる確率は $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{6}=\frac{3}{4}$，

B が生じる確率は $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

(1) A が 2 回，B が 1 回生じるときであるから，確率は，

$${}_3C_2\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^1=\frac{27}{64} \quad \cdots(答)$$

(2) A が 4 回，B が 2 回生じるときであるから，確率は，

$${}_6C_4\left(\frac{3}{4}\right)^4\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1215}{4096} \quad \cdots(答)$$

(3) 試行(＊)を n 回繰り返すとき，A が a 回，B が b 回生じるとする。(a，b は 0 以上の整数)

このとき，P の座標を p とすると，

$$\begin{aligned} p &= 1\cdot a+(-2)\cdot b \\ &= (n-b)-2b \qquad (a+b=n \text{ より}) \\ &= n-3b \end{aligned}$$

n は 3 で割り切れない整数だから，p = 0 となることはない。

したがって，求める確率は，

$$0 \quad \cdots(答)$$

2　(ここには 2 の解答を記入すること。)

(1) $x_{n+1}=(x_n)^5\cdot(y_n)^2$ より $\log_2 x_{n+1}=5\log_2 x_n+2\log_2 y_n \rightleftarrows a_{n+1}=5a_n+2b_n$ …①

$y_{n+1}=x_n\cdot(y_n)^6$ より $\log_2 y_{n+1}=\log_2 x_n+6\log_2 y_n \rightleftarrows b_{n+1}=a_n+6b_n$ …②

①＋②×k より $a_{n+1}+kb_{n+1}=(k+5)a_n+(6k+2)b_n$ …③

$\{a_n+kb_n\}$ が等比数列になるとき $(k+5)\cdot k=6k+2$ が成り立つ。このkの2次方程式より

$k^2-k-2=0 \rightleftarrows (k-2)(k+1)=0$　∴ $k=-1, 2$ …[答]

(2) $k=-1$ のとき③は $a_{n+1}-b_{n+1}=4(a_n-b_n)$ となり、$\{a_n-b_n\}$ は

初項 $a_1-b_1=\log_2 x_1-\log_2 y_1=\log_2 2-\log_2\frac{1}{2}=1-(-1)=2$，公比4の等比数列.

よって、$a_n-b_n=2\cdot4^{n-1}$ …④

また、$k=2$ のとき③は $a_{n+1}+2b_{n+1}=7(a_n+2b_n)$ となり、$\{a_n+2b_n\}$ は

初項 $a_1+2b_1=\log_2 x_1+2\log_2 y_1=\log_2 2+2\log_2\frac{1}{2}=1+(-2)=-1$，公比7の等比数列,

よって、$a_n+2b_n=-7^{n-1}$ …⑤

(④×2＋⑤)÷3 より $a_n=\dfrac{4^n-7^{n-1}}{3}$，(⑤－④)÷3 より $b_n=\dfrac{-2\cdot4^{n-1}-7^{n-1}}{3}$

$x_n=2^{a_n}$ より、$x_n=2^{\frac{4^n-7^{n-1}}{3}}$ …[答]

3

(ここには3の解答を記入すること。)

$f(x) = x^4 + \frac{4a}{3}x^3 + (a+2)x^2$.

$f'(x) = 4x^3 + 4ax^2 + 2(a+2)x$

$= 2x(2x^2 + 2ax + a + 2)$.

(1)　$f'(x)$ が正から負に変化する x が少なくとも1つ存在するような a の値の範囲を求めればよい.

$g(x) = 2x^2 + 2ax + a + 2$ とおき, $g(x) = 0$ の判別式を D とする.

$\frac{D}{4} = a^2 - 2a - 4$ である.

(ア)　$D \leqq 0$ すなわち $1-\sqrt{5} \leqq a \leqq 1+\sqrt{5}$ のとき.

$$g(x) = 2\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{2} + a + 2$$

$$= 2\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{D}{8}$$

$$\geqq 0$$

であり, $f'(x) = 2x\,g(x)$ であるから, $f'(x)$ が正から負に変化する x は存在しない.

(イ)　$g(x) = 0$ が $x = 0$ を解にもつ, すなわち $a = -2$ のとき.

$g(x) = 2x^2 - 4x$ より

$f'(x) = 4x^2(x-2)$ であり, $f'(x)$ が正から負に変化する x は存在しない.

(ウ)　$D > 0$ かつ $a \neq -2$ のとき.

$f'(x) = 0$ は異なる3つの実数解をもつ(そのうち1つは $x = 0$).

3解を小さい順に α, β, γ とすれば, $f(x)$ の増減は次表.

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$	γ	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

$x = \beta$ で極大値をとり, 適する.

以上より, 求める範囲は

$a < -2,\ -2 < a < 1-\sqrt{5},\ 1+\sqrt{5} < a$.

…[答]

(2)　(1)の(ウ)において $\beta = 0$ であればよい.

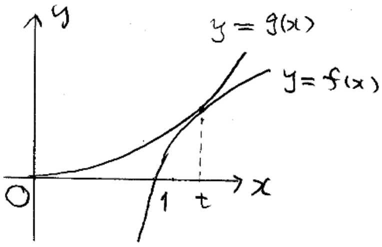
それは $g(x) = 0$ が正の解と負の解を1つずつもつときであり, そのための条件は

$g(0) = a + 2 < 0$.

よって, 求める範囲は

$a < -2$.　…[答]

4　(ここには4の解答を記入すること。)



$$\begin{cases} f(x) = n\log x & (x>0) \\ g(x) = ax^n \end{cases}$$

(1)　$y=f(x)$ と $y=g(x)$ が $x=t$ において点を共有し，その点における両曲線の接線の傾きが等しい条件は

$$\begin{cases} n\log t = at^n & \cdots ① \\ \dfrac{n}{t} = nat^{n-1} & \cdots ② \end{cases}$$

②より　$at^n = 1$　すなわち　$t = a^{-\frac{1}{n}}$．これを①に代入して

$-\log a = 1$　∴　$\underline{a = \frac{1}{e}}$　…[答]

(2)　$t = e^{\frac{1}{n}}$ だから

$$S_n = \int_0^{e^{\frac{1}{n}}} \frac{1}{e}x^n dx - \int_1^{e^{\frac{1}{n}}} n\log x\, dx$$
$$= \left[\frac{1}{e(n+1)}x^{n+1}\right]_0^{e^{\frac{1}{n}}} - n\left[x\log x - x\right]_1^{e^{\frac{1}{n}}}$$
$$= \frac{1}{e(n+1)}e^{\frac{n+1}{n}} - n\left(\frac{1}{n}e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n}} + 1\right)$$
$$= -\frac{n}{n+1}e^{\frac{1}{n}} + n(e^{\frac{1}{n}} - 1) \quad = \underline{\frac{n^2}{n+1}e^{\frac{1}{n}} - n} \quad \cdots [答]$$

(3)
$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{n}{n+1}e^{\frac{1}{n}}\right) = -1\cdot 1 = -1 \\ \displaystyle\lim_{n\to\infty} n(e^{\frac{1}{n}}-1) = \lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} = 1 \quad \left(\because \lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = 1\right) \end{cases}$$

より

$$\lim_{n\to\infty} S_n = -1+1 = \underline{0} \quad \cdots [答]$$

5　(ここには 5 の解答を記入すること。)

(1)　$\overrightarrow{NQ}=t\overrightarrow{NP}$ (tは実数) とおけるので,

$$\overrightarrow{OQ}=(1-t)\overrightarrow{ON}+t\overrightarrow{OP}$$
$$=(1-t)(0,0,1)+t(a,b,c)$$
$$=(at,\ bt,\ 1-t+ct)$$

Qはxy平面上であるから, $1-t+ct=0$. $c\neq1$に注意して, $t=\dfrac{1}{1-c}$.

よって, $Q\left(\dfrac{a}{1-c},\ \dfrac{b}{1-c},\ 0\right)$. ……(答)

(2)　(1)の結果において, $p=\dfrac{a}{1-c}$, $q=\dfrac{b}{1-c}$ とおくと,

$a=(1-c)p$, $b=(1-c)q$.

点(a,b,c)は S上にあるから, $a^2+b^2+c^2=1$.

$$\{(1-c)p\}^2+\{(1-c)q\}^2+c^2=1.$$
$$(p^2+q^2+1)c^2-2(p^2+q^2)c+p^2+q^2-1=0.$$
$$(c-1)\{(p^2+q^2+1)c-(p^2+q^2-1)\}=0.$$

$c\neq1$に注意して, $c=\dfrac{p^2+q^2-1}{p^2+q^2+1}$.

よって, 求める交点は $\left(\dfrac{2p}{p^2+q^2+1},\ \dfrac{2q}{p^2+q^2+1},\ \dfrac{p^2+q^2-1}{p^2+q^2+1}\right)$. ……(答)

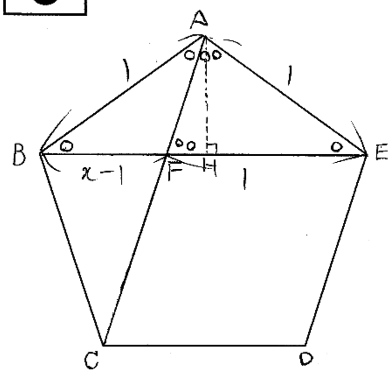
(3)　$Q(p,q,0)$ とおく. このとき, Pは S上であるから, Pの座標は(2)の結果である.
Pは平面α上でもあるから, $A\left(0,0,\frac{1}{2}\right)$, $\vec{n}=(3,4,5)$として,
$\overrightarrow{AP}\perp\vec{n}$ つまり $\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}=0$をみたす. よって,

$$\frac{1}{2(p^2+q^2+1)}(4p,\ 4q,\ p^2+q^2-3)\cdot(3,\ 4,\ 5)=0.$$

$$12p+16q+5(p^2+q^2-3)=0.$$
$$p^2+\frac{12}{5}p+q^2+\frac{16}{5}q-3=0.$$
$$\left(p+\frac{6}{5}\right)^2+\left(q+\frac{8}{5}\right)^2=7.$$

よって, Qはxy平面上の円周上を動く. (証明終り)

6 (ここには 6 の解答を記入すること。)



(図I)

(1) 図Iの正五角形ABCDEで対角線BE $=x$ とすると

BF $=x-1$ で $\triangle ABF \backsim \triangle EBA$ より

AB : EB = FB : AB なので

$1 : x = (x-1) : 1$ より $x^2-x-1=0$

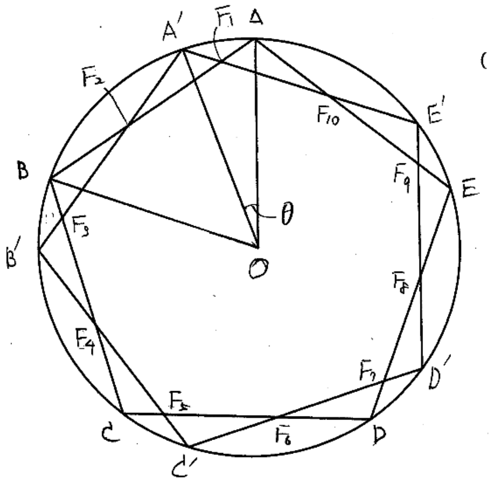
$x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

$x>0$ より BE $=x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ …… [答]

またAからBEに垂線AHを下ろす。

HはBEの中点より BH $=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$

$\angle ABE=36^\circ$ なのでこれを α とすると $\cos\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$ である。



(図II)

(2) 図IIのように記号を設定すると、題意の図形は点 F_1 〜 F_{10} を結んで囲まれた十角形になる。

正五角形を回転しているので $\triangle AOB$ で考えて

AB上の F_1F_2 の長さを a とすると $l_\theta=10a$ となる。

$\angle BAO=\angle B'A'O=54^\circ$ より

4点 A, A', F_2, O は同一円周上にあるので

$\angle AF_2A'=\theta$

$\angle A'F_1F_2=180^\circ-108^\circ-\theta=72^\circ-\theta=2\alpha-\theta$ より

((1)の α を用いた)

$\triangle A'F_1F_2$ で正弦定理より

$$\frac{a}{\sin(180^\circ-2\alpha)}=\frac{A'F_1}{\sin\theta}=\frac{A'F_2}{\sin(2\alpha-\theta)}$$

$$A'F_1=\frac{a}{\sin(180^\circ-2\alpha)}\times\sin\theta=\frac{a\sin\theta}{\sin2\alpha}$$

$$A'F_2=\frac{a}{\sin(180^\circ-2\alpha)}\times\sin(2\alpha-\theta)=\frac{a\sin(2\alpha-\theta)}{\sin2\alpha}$$

$AB=AF_1+F_1F_2+F_2B=A'F_1+F_1F_2+F_2A'$ より

$$1=\frac{a\sin\theta}{\sin2\alpha}+a+\frac{a\sin(2\alpha-\theta)}{\sin2\alpha}=a\cdot\frac{\sin\theta+\sin2\alpha+\sin(2\alpha-\theta)}{\sin2\alpha}$$

$l_\theta=10a$ が最小 $\iff$ $\sin\theta+\sin2\alpha+\sin(2\alpha-\theta)$ が最大 なので

$$\sin\theta+\sin2\alpha+\sin(2\alpha-\theta)=\sin2\alpha+2\sin\alpha\cos(\theta-\alpha)$$

$0^\circ<\theta<72^\circ=2\alpha$ より $\theta=\alpha$ で最大なので

l_θ の最小値は $10\cdot\dfrac{\sin2\alpha}{\sin\alpha+\sin2\alpha+\sin(2\alpha-\alpha)}$

$$=10\cdot\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\sin\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}=10\cdot\frac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=10\cdot\frac{\frac{1+\sqrt{5}}{4}}{1+\frac{1+\sqrt{5}}{4}}$$

$=2\sqrt{5}$ より成立 [証明終]