

第 1 問

(1)  $Q(b, b^2)$  とおく.  $y = x^2$  において,  $y' = 2x$  より,  $P(a, a^2)$  における法線  $l$  の方程式は,

$$y = -\frac{1}{2a}(x-a) + a^2$$

$$y = -\frac{1}{2a}x + a^2 + \frac{1}{2}$$

$C: y = x^2$  と連立して,

$$x^2 = -\frac{1}{2a}x + a^2 + \frac{1}{2}$$

$$(x-a)\left(x+a+\frac{1}{2a}\right) = 0$$

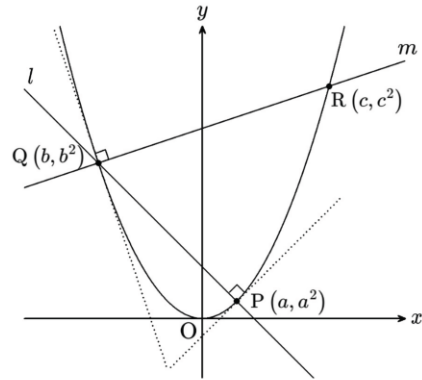
この 2 解が  $a, b$  であるから,

$$b = -a - \frac{1}{2a}$$

よって, 求める  $Q$  の  $x$  座標は,

$$-a - \frac{1}{2a}$$

… (答)



(2)  $R(c, c^2)$  とおくと, (1) と同様にして,

$$c = -b - \frac{1}{2b}$$

より, この最小値を求めればよい. まず,  $a > 0$  より, 相加相乗平均の不等式から,

$$b = -\left(a + \frac{1}{2a}\right) \leq -2\sqrt{a \cdot \frac{1}{2a}} = -\sqrt{2}$$

等号は,  $a = \frac{1}{2a}$  より,  $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$  ( $a > 0$  より) のときに成立.

…①

次に,  $c = -b - \frac{1}{2b}$  ( $b \leq -\sqrt{2}$ ) の最小値を求める.  $-b = B$  とおくと,  $b \leq -\sqrt{2}$  より,  $B \geq \sqrt{2}$  であり,

$$c = (-b) + \frac{1}{2(-b)} = B + \frac{1}{2B}$$

これを  $f(B)$  とおくと,

$$f(B) = (\sqrt{B})^2 - 2 \cdot \sqrt{B} \cdot \frac{1}{\sqrt{2B}} + \left(\frac{1}{\sqrt{2B}}\right)^2 + 2 \cdot \sqrt{B} \cdot \frac{1}{\sqrt{2B}} = \left(\sqrt{B} - \frac{1}{\sqrt{2B}}\right)^2 + \sqrt{2}$$

より,  $f(B)$  は  $B \geq \sqrt{2}$  において単調増加だから,

$$f(B) \geq f(\sqrt{2}) = \sqrt{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{4}$$

$B = \sqrt{2}$  のとき,  $b = -\sqrt{2}$ , このとき, ①より  $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$  である. よって, 求める最小値は,

$$\frac{5\sqrt{2}}{4}$$

… (答)

【(2) の参考】

$b$  は  $b \leq -\sqrt{2}$  のすべての値をとり得るので,  $c$  の値域を,

$$\begin{cases} c = -b - \frac{1}{2b} & \dots ② \\ b \leq -\sqrt{2} \end{cases}$$

とともに満たす実数  $b$  が存在するような  $c$  の条件として求めることも可能. ②より,

$$2b^2 + 2cb + 1 = 0 \quad \dots ②'$$

であるから,

「 $b$  の方程式②'が  $b \leq -\sqrt{2}$  に少なくとも 1 つ解をもつ」

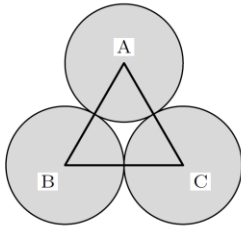
条件を考えることになる.

第 2 問

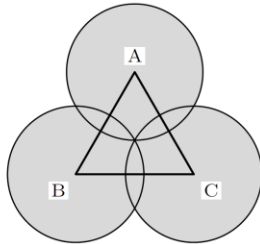
$X$  : 辺  $AB, BC, CA$  がすべて  $D_r$  に含まれる中で  $r$  が最小となる状態, とする.  
 $Y$  : 三角形  $ABC$  が  $D_r$  に含まれる中で  $r$  が最小となる状態

(1)  $\angle BAC = \frac{\pi}{3}$  のとき.

(図 1)



(図 2)



$X$  となるのは左の (図 1) のようになるときであり,  $s$  は辺  $AB$  の長さの  $\frac{1}{2}$  となるときであるから,

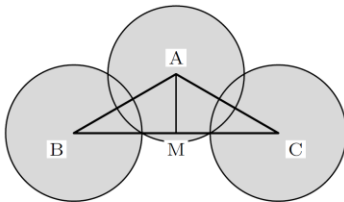
$$s = \frac{1}{2}. \quad \dots(\text{答})$$

$Y$  となるのは左の (図 2) のようになるときであり,  $t$  は正三角形  $ABC$  の外接円の半径に等しいときであるから,

$$t = \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad \dots(\text{答})$$

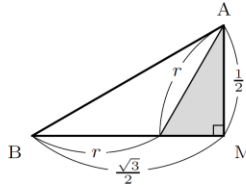
(2)  $\angle BAC = \frac{2}{3}\pi$  のとき.

(図 3)



$BC$  の中点を  $M$  とする.

$X, Y$  となるのはともに左の (図 3) のようになるときである.



上の図において, 三平方の定理より,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - r\right)^2 = r^2$$

$$r = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

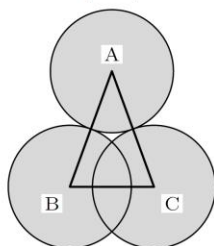
$$s = t = \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad \dots(\text{答})$$

第 2 問 (つづき 1)

(3)  $s$  について.

(ア)  $AB \geq BC$ , すなわち,  $0 < \theta \leq \frac{\pi}{3}$  のとき.

(図 4)



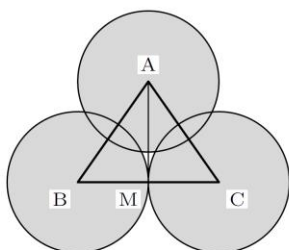
このとき,  $X$  となるのは左の (図 4) のようになるときであり,

$s$  は辺  $AB$  の長さの  $\frac{1}{2}$  となるときであるから,

$$s = \frac{1}{2}.$$

(イ)  $AB < BC$ , かつ,  $AM > BM$  のとき, すなわち,  $\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{2}$  のとき.

(図 5)



このとき,  $X$  となるのは左の (図 5) のようになるときであり,

$s$  は線分  $BM$  の長さとなればよい.

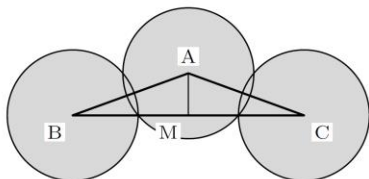
$$BM = AB \sin \frac{\theta}{2}$$

より,

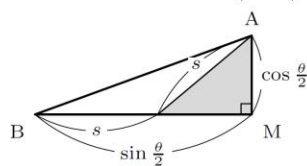
$$s = \sin \frac{\theta}{2}.$$

(ウ)  $AB < BC$ , かつ,  $AM \leq BM$  のとき, すなわち,  $\frac{\pi}{2} \leq \theta < \pi$  のとき.

(図 6)



このとき,  $X$  となるのは左の (図 6) のようになるときである.



上の図において, 三平方の定理より,

$$\left(\cos \frac{\theta}{2}\right)^2 + \left(\sin \frac{\theta}{2} - s\right)^2 = s^2.$$

$$s = \frac{1}{2 \sin \frac{\theta}{2}}.$$

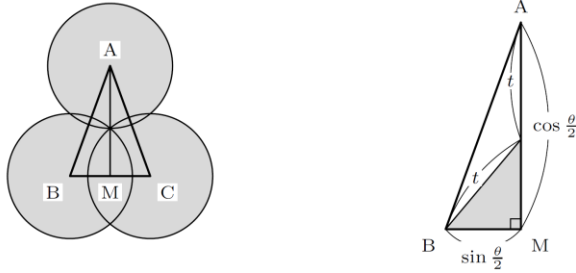
第 2 問 (つづき 2)

$t$  について.

(イ) 三角形 ABC の外心が三角形の内部にある, すなわち,  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  のとき.

(図 7)

このとき,  $Y$  となるのは左の (図 7) のようになるときである.



上の図において, 三平方の定理より,

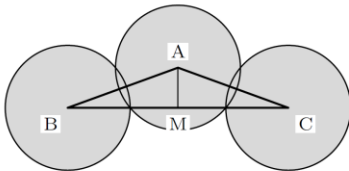
$$\left(\sin \frac{\theta}{2}\right)^2 + \left(\cos \frac{\theta}{2} - t\right)^2 = t^2.$$

$$t = \frac{1}{2 \cos \frac{\theta}{2}}.$$

(ロ) 三角形 ABC の外心が三角形の周および外部にある, すなわち,  $\frac{\pi}{2} \leq \theta < \pi$  のとき.

(図 6)

このとき,  $Y$  となるのは, (イ) における  $X$  と同じく, 左の (図 6) のようになるときである.



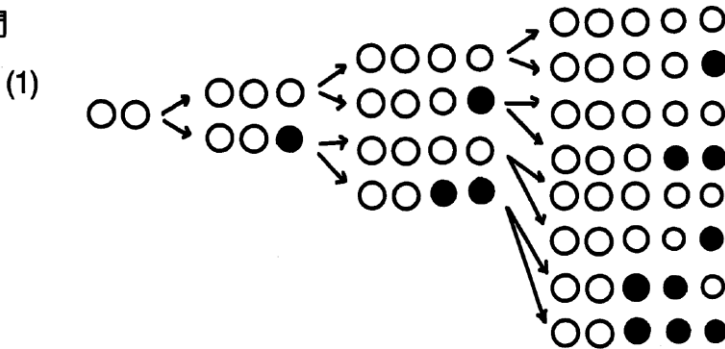
よって,

$$t = \frac{1}{2 \sin \frac{\theta}{2}}.$$

以上から,

$$s = \begin{cases} \frac{1}{2} & \left(0 < \theta \leq \frac{\pi}{3}\right), \\ \sin \frac{\theta}{2} & \left(\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{2}\right), \\ \frac{1}{2 \sin \frac{\theta}{2}} & \left(\frac{\pi}{2} \leq \theta < \pi\right), \end{cases} \quad t = \begin{cases} \frac{1}{2 \cos \frac{\theta}{2}} & \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right), \\ \frac{1}{2 \sin \frac{\theta}{2}} & \left(\frac{\pi}{2} \leq \theta < \pi\right). \end{cases} \quad \dots (\text{答})$$

第3問



樹形図より,  $\frac{5}{8}$  ... (答)

(2)(3)  $n$  回後の右端の玉が  $\circ\circ, \circ\bullet, \bullet\circ, \bullet\bullet$  となる確率を各々  $a_n, b_n, c_n, d_n$  とおくと,

$$a_n + b_n + c_n + d_n = 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

また条件より

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n & \dots \textcircled{2} \\ b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n & \dots \textcircled{3} \\ c_{n+1} = \frac{1}{2}d_n & \dots \textcircled{4} \\ d_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n + \frac{1}{2}d_n & \dots \textcircled{5} \end{cases}$$

$\textcircled{2} - \textcircled{5}$  より  $a_{n+1} - d_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n - d_n)$   
 よって  $a_n - d_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(a_1 - d_1) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \dots \textcircled{2}'$   
 ( $a_1 = \frac{1}{2}, d_1 = 0$  より)

$\textcircled{2} + \textcircled{5}$  より  $a_{n+1} + d_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + d_n) + (b_n + c_n)$

$\textcircled{1}$  より  $b_n + c_n = 1 - (a_n + d_n)$  であるからこれを代入して

$$a_{n+1} + d_{n+1} = -\frac{1}{2}(a_n + d_n) + 1$$

$$a_{n+1} + d_{n+1} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{2}\left(a_n + d_n - \frac{2}{3}\right)$$

よって,  $a_n + d_n - \frac{2}{3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(a_1 + d_1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

つまり  $a_n + d_n = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \dots \textcircled{5}'$

$(\textcircled{2}') + \textcircled{5}'$  より  $a_n = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \dots$  (\*) ... (3) の答

また  $n \geq 2$  のとき  $a_n + b_n = a_n + \frac{1}{2}a_{n-1}$  ( $\because \textcircled{3}$ )

(\*) を代入して  $a_n + b_n = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$n=1$  のときも成り立つので  $a_n + b_n = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^n \dots$  (2) の答

第3問 つづき

(注1)  $(x)$  を  $n$  の偶奇で分けて表すと

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n & (n: \text{偶数}) \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n & (n: \text{奇数}) \end{cases}$$

(注2) 漸化式の根の方は様々ある。1つの例は以下。

②+④より,

$$a_{n+1} + c_{n+1} = \frac{1}{2} (a_n + b_n + c_n + d_n) = \frac{1}{2}. \quad (\text{①より})$$

よって,  $a_n + c_n = \frac{1}{2}$  ( $n \geq 2$ ) であり,  $a_1 = \frac{1}{2}, c_1 = 0$  より  $a_n + c_n = \frac{1}{2}$  ( $n \geq 1$ ).

したがって,  $c_n = \frac{1}{2} - a_n$  として ②+③ に代入すると,

$$a_{n+1} + b_{n+1} = a_n + \frac{1}{2} b_n + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - a_n\right) = \frac{1}{2} (a_n + b_n) + \frac{1}{4}.$$

(2)の 求める確率は,  $a_n + b_n$  であり, これを  $x_n$  とおくと,

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2} x_n + \frac{1}{4}.$$

これを解くと,

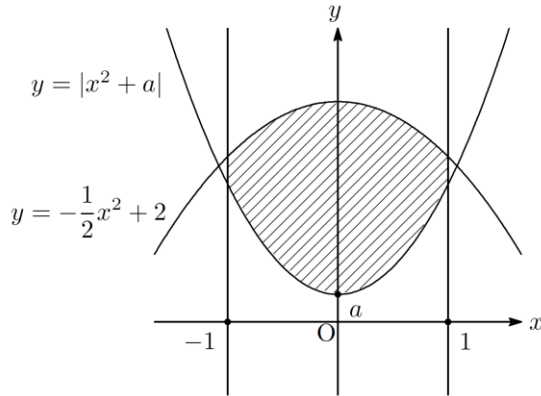
$$x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad \dots (2) \text{の答}$$

第4問

まず、 $0 \leq a < 2$  のときを考えると、

$$y \geq |x^2 + a| = x^2 + a$$

であるから、連立不等式が表す領域は次の斜線部分 (境界含む) のようになる。

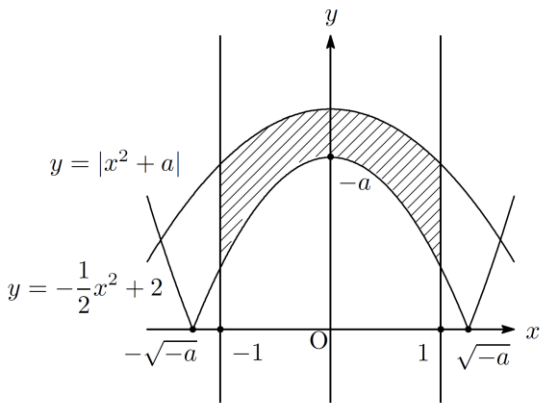


$a$  の値が増加するにともない、放物線  $y = x^2 + a$  は  $y$  軸正の方向に平行移動するので、この領域の面積は単調減少する。すなわち、 $0 \leq a < 2$  のとき  $S(a) \leq S(0)$  が成り立つので、 $S(a)$  は  $-2 \leq a \leq 0$  の範囲において最大値をとる。

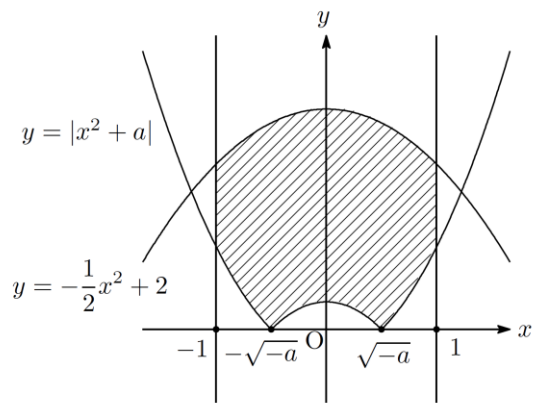
次に、 $-2 \leq a \leq 0$  のときを考えると、

$$y \geq |x^2 + a| = \begin{cases} x^2 + a & (x \leq -\sqrt{-a}, \sqrt{-a} \leq x \text{ のとき}) \\ -(x^2 + a) & (-\sqrt{-a} \leq x \leq \sqrt{-a} \text{ のとき}) \end{cases}$$

であるから、 $\sqrt{-a}$  と 1 の大小に応じて、連立不等式が表す領域は次の斜線部分 (境界含む) のようになる。



$-2 \leq a \leq -1$  のとき



$-1 \leq a \leq 0$  のとき

よって、 $-2 \leq a \leq -1$  のときは、 $a$  の値が増加するにともない、放物線  $y = -(x^2 + a)$  は  $y$  軸負の方向に平行移動するので、この領域の面積は単調増加する。すなわち、 $-2 \leq a \leq -1$  のとき  $S(a) \leq S(-1)$  が成り立つので、 $S(a)$  は  $-1 \leq a \leq 0$  の範囲において最大値をとる。

第4問 (つづき)

$-1 \leq a \leq 0$  のとき,  $t = \sqrt{-a}$  とおくと

$$a = -t^2, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

であり, 図より

$$\begin{aligned} S(a) &= 2 \int_0^1 \left( -\frac{1}{2}x^2 + 2 \right) dx - 2 \int_0^{\sqrt{-a}} \{-(x^2 + a)\} dx - 2 \int_{\sqrt{-a}}^1 (x^2 + a) dx \\ &= 2 \int_0^1 \left( -\frac{1}{2}x^2 + 2 \right) dx + 2 \int_0^t (x^2 - t^2) dx - 2 \int_t^1 (x^2 - t^2) dx \quad (\textcircled{1} \text{より}) \\ &= 2 \left[ -\frac{1}{6}x^3 + 2x \right]_0^1 + 2 \left[ \frac{1}{3}x^3 - t^2x \right]_0^t - 2 \left[ \frac{1}{3}x^3 - t^2x \right]_t^1 \\ &= -\frac{8}{3}t^3 + 2t^2 + 3 \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

となる. ゆえに①, ②より, 求める最大値は,  $t$  の関数

$$f(t) = -\frac{8}{3}t^3 + 2t^2 + 3 \quad (0 \leq t \leq 1)$$

の最大値に等しい.

$f(t)$  を微分すると,

$$f'(t) = -8t^2 + 4t = 4t(1 - 2t)$$

となるので,  $0 \leq t \leq 1$  における増減は次のようになる.

$t$	0	...	$\frac{1}{2}$	...	1
$f'(t)$		+	0	-	
$f(t)$		↗	極大	↘	

表より, 求める最大値は

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{19}{6} \quad \dots (\text{答})$$

である.