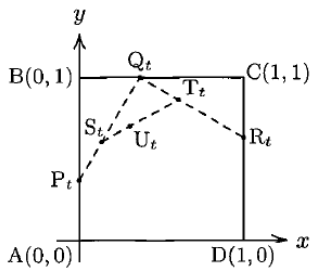
第１問

(1)



$0 < t < 1$ とする．$\mathrm{P}_t, \mathrm{Q}_t, \mathrm{R}_t$ の座標はそれぞれ $(0, t), (t, 1), (1, 1-t)$ であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{AS}_t} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{AP}_t} + t\overrightarrow{\mathrm{AQ}_t} = (1-t)\begin{pmatrix}0\\t\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}t\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t^2\\2t-t^2\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AT}_t} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{AQ}_t} + t\overrightarrow{\mathrm{AR}_t} = (1-t)\begin{pmatrix}t\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\1-t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2t-t^2\\1-t^2\end{pmatrix}$$

であり，

$$\overrightarrow{\mathrm{AU}_t} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{AS}_t} + t\overrightarrow{\mathrm{AT}_t} = (1-t)\begin{pmatrix}t^2\\2t-t^2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2t-t^2\\1-t^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3t^2-2t^3\\3t-3t^2\end{pmatrix}.$$

したがって，

$$\mathrm{U}_t(3t^2-2t^3, 3t-3t^2). \qquad \cdots\ (答)$$

これは $t = 0, 1$ でも正しい．

(2) $x(t) = 3t^2 - 2t^3, y(t) = 3t - 3t^2$ とおく．$0 \leqq t \leqq 1$ において，$x'(t) = 6t(1-t) \geqq 0$ より $x(t)$ は単調増加であり，$y(t) = 3t(1-t) \geqq 0$ である．したがって，求める面積は

$$\begin{aligned}\int_{x(0)}^{x(1)} y\,dx &= \int_0^1 y(t)\frac{dx}{dt}dt = \int_0^1 (3t-3t^2)(6t-6t^2)dt \\ &= 18\int_0^1 \left(t^4 - 2t^3 + t^2\right)dt = 18\left[\frac{t^5}{5} - \frac{t^4}{2} + \frac{t^3}{3}\right]_0^1 \\ &= \frac{3}{5}. \qquad \cdots\ (答)\end{aligned}$$

(3) 求める長さは

$$\begin{aligned}\int_0^a \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt &= \int_0^a \sqrt{(6t-6t^2)^2 + (3-6t)^2}dt = 3\int_0^a \sqrt{4t^4 - 8t^3 + 8t^2 - 4t + 1}dt \\ &= 3\int_0^a \sqrt{(2t^2-2t+1)^2}dt = 3\int_0^a \left(2t^2 - 2t + 1\right)dt \\ &= 3\left[\frac{2t^3}{3} - t^2 + t\right]_0^a = 2a^3 - 3a^2 + 3a. \qquad \cdots\ (答)\end{aligned}$$

ただし，4 番目の等号で，$0 \leqq t \leqq 1$ で $2t^2 - 2t + 1 \geqq 0$ であることを用いた．

(参考．上の因数分解は

$$\begin{aligned}4t^4 - 8t^3 + 8t^2 - 4t + 1 &= (2t^2-2t)^2 + 2(2t^2-2t) + 1 \\ &= (2t^2-2t+1)^2\end{aligned}$$

のように計算することで得られる．)

第2問

(1)　$f(x)=x-1-\log x\quad(x>0)$ とおくと, $f'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$ より増減表は右のようになる. よって,

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$

$x>0$ で $f(x)\geqq 0$, すなわち, $\log x\leqq x-1$ が成り立つ.　**(証明終り)**

(2)　(以下, n は正の整数として解答する.)

$$I_n=n\int_1^2\log\left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}\right)dx$$

とおく. (1) の不等式より,

$$\begin{aligned}I_n&\leqq n\int_1^2\left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}-1\right)dx=\frac{n}{2}\int_1^2\left(x^{\frac{1}{n}}-1\right)dx=\frac{n}{2}\left[\frac{1}{\frac{1}{n}+1}x^{\frac{1}{n}+1}-x\right]_1^2\\&=\frac{n}{2}\left\{\frac{n}{n+1}\left(2^{\frac{1}{n}+1}-1\right)-(2-1)\right\}=\frac{n}{2}\left(\frac{2n}{n+1}2^{\frac{1}{n}}-\frac{2n+1}{n+1}\right)=\frac{n}{2}\left\{\frac{2n}{n+1}(2^{\frac{1}{n}}-1)-\frac{1}{n+1}\right\}\\&=\frac{n}{n+1}\cdot\frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}-\frac{n}{2(n+1)}\to 1\cdot\log 2-\frac{1}{2}\quad(n\to\infty).\end{aligned}\qquad\cdots ①$$

$g(x)=2^x$ のとき $g'(x)=2^x\log 2$ である. 微分係数の定義より, $g'(0)=\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}$ であるから,
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=\lim_{h\to 0}\frac{2^h-1}{h}=\log 2$ となる. このことを ① で用いた.

相加平均と相乗平均の関係式より $\dfrac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}\geqq\sqrt{1\cdot x^{\frac{1}{n}}}=x^{\frac{1}{2n}}$ であるから,

$$\begin{aligned}I_n&\geqq n\int_1^2\log\left(x^{\frac{1}{2n}}\right)dx=n\int_1^2\frac{1}{2n}\log x\,dx=\frac{1}{2}\int_1^2\log x\,dx=\frac{1}{2}[x\log x-x]_1^2\\&=\frac{1}{2}\{(2\log 2-1\log 1)-(2-1)\}=\log 2-\frac{1}{2}.\end{aligned}\qquad\cdots ②$$

①, ② より, はさみうちの原理から

$$\lim_{n\to\infty}I_n=\log 2-\frac{1}{2}.\qquad\cdots\textbf{(答)}$$

(2) の別解　部分積分より

$$\begin{aligned}I_n&=n\int_1^2\log\left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}\right)dx=n\left[x\log\left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}\right)\right]_1^2-n\int_1^2x\cdot\frac{\left(\frac{\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}}{2}\right)}{\left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}\right)}dx\\&=n\cdot 2\log\left(\frac{1+2^{\frac{1}{n}}}{2}\right)-0-\int_1^2\frac{x^{\frac{1}{n}}}{1+x^{\frac{1}{n}}}dx=2n\log\left(1+\frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{2}\right)-\int_1^2\frac{x^{\frac{1}{n}}}{1+x^{\frac{1}{n}}}dx.\end{aligned}$$

$\dfrac{2^{\frac{1}{n}}-1}{2}=k$ とおくと, $n\to\infty$ のとき $k\to 0$ となるので,

$$2n\log\left(1+\frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{2}\right)=2nk\cdot\frac{\log(1+k)}{k}=\frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}\cdot\frac{\log(1+k)}{k}\to(\log 2)\cdot 1\quad(n\to\infty).\qquad\cdots ③$$

$\dfrac{t}{1+t}=1-\dfrac{1}{1+t}\quad(t>0)$ は単調増加なので,

$$\int_1^2\frac{1}{1+1}dx\leqq\int_1^2\frac{x^{\frac{1}{n}}}{1+x^{\frac{1}{n}}}dx\leqq\int_1^2\frac{2^{\frac{1}{n}}}{1+2^{\frac{1}{n}}}dx\iff\frac{1}{2}\leqq\int_1^2\frac{x^{\frac{1}{n}}}{1+x^{\frac{1}{n}}}dx\leqq\frac{2^{\frac{1}{n}}}{1+2^{\frac{1}{n}}}.$$

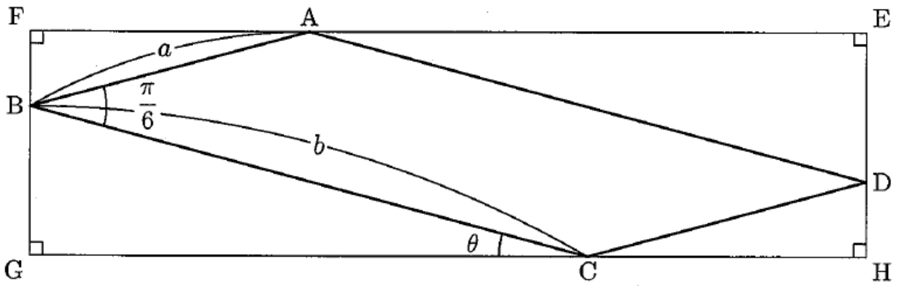
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^{\frac{1}{n}}}{1+2^{\frac{1}{n}}}=\frac{2^0}{1+2^0}=\frac{1}{2}$ であるから, はさみうちの原理で

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^2\frac{x^{\frac{1}{n}}}{1+x^{\frac{1}{n}}}dx=\frac{1}{2}.\qquad\cdots ④$$

③, ④ より

$$\lim_{n\to\infty}I_n=\log 2-\frac{1}{2}.\qquad\cdots\textbf{(答)}$$

第３問



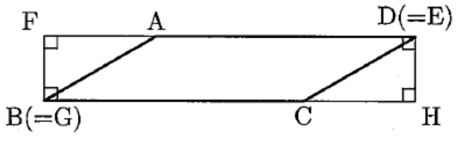
(1) $\angle\mathrm{DCH}=\angle\mathrm{BAF}=\dfrac{\pi}{6}-\theta$，$\triangle\,\mathrm{ABF}\equiv\triangle\,\mathrm{CDH}$，$\triangle\,\mathrm{BCG}\equiv\triangle\,\mathrm{DAE}$ であるから，

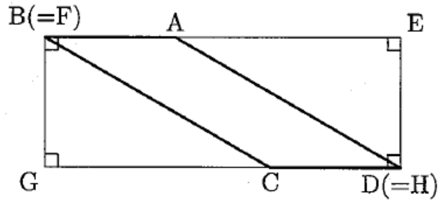
$$
\begin{aligned}
S&=2\,\triangle\,\mathrm{ABF}+2\,\triangle\,\mathrm{BCG}+2\,\triangle\,\mathrm{ABC}\\
&=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\left\{a\cos\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)\right\}\cdot a\sin\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)+2\cdot\frac{1}{2}\cdot(b\cos\theta)\cdot b\sin\theta+2\cdot\frac{1}{2}ab\sin\frac{\pi}{6}\\
&=\frac{a^2}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3}-2\theta\right)+\frac{b^2}{2}\sin 2\theta+\frac{ab}{2}\\
&=\frac{2b^2-a^2}{4}\sin 2\theta+\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\cos 2\theta+\frac{ab}{2}.
\end{aligned}
$$

…(答)

【(1) の注】

$\theta=0$ のときは左下の図，$\theta=\dfrac{\pi}{6}$ のときは右下の図のようになる．





((1) の注終り)

第３問 （つづき１）

(2) (1) の結果より，

$$S=\frac{1}{4}\left\{(2b^2-a^2)\sin 2\theta+\sqrt{3}a^2\cos 2\theta\right\}+\frac{ab}{2}. \qquad \cdots①$$

$0<a\leqq b$ により，$2b^2-a^2>0$，$\sqrt{3}a^2>0$ であるから，$\tan\alpha=\dfrac{\sqrt{3}a^2}{2b^2-a^2}$ を満たす鋭角 α が存在し，この α を用いて ① の右辺を変形すると，

$$S=\frac{\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}}{2}\sin(2\theta+\alpha)+\frac{ab}{2}.$$

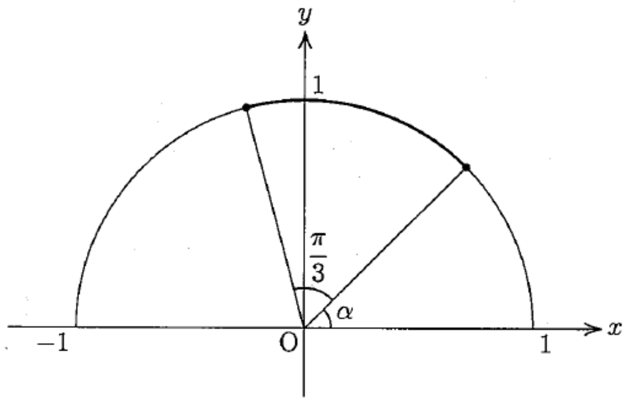
また，$\angle\mathrm{DCH}=\dfrac{\pi}{6}-\theta\geqq 0$ より，θ のとりうる値の範囲は $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{6}$ であるから，$2\theta+\alpha$ は

$$\alpha\leqq 2\theta+\alpha\leqq\frac{\pi}{3}+\alpha \qquad \cdots②$$

を満たしながら変化する．

② を満たす $2\theta+\alpha$ の範囲に $\dfrac{\pi}{2}$ が含まれるのは，$\alpha+\dfrac{\pi}{3}\geqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき，すなわち，$\alpha\geqq\dfrac{\pi}{6}$ のときであるから，次の２つの場合に分けて S のとりうる値の最大値を求める．

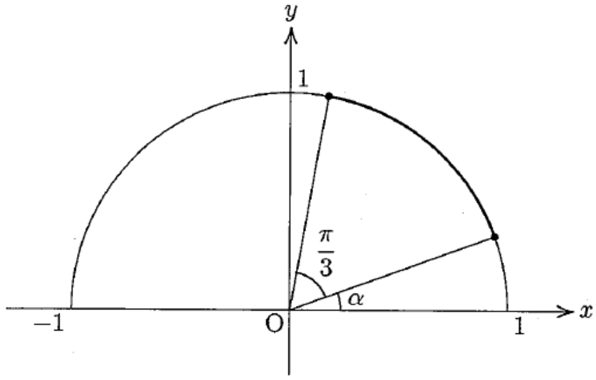
(i) $\alpha\geqq\dfrac{\pi}{6}$ のとき，すなわち，$\tan\alpha\geqq\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき．



このとき，$\dfrac{\sqrt{3}a^2}{2b^2-a^2}\geqq\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ から，$a\leqq b\leqq\sqrt{2}a$ であり，S は $2\theta+\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ のときに最大値 $\dfrac{\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}}{2}+\dfrac{ab}{2}$ をとる．

第３問 (つづき２)

(ii) $\alpha < \dfrac{\pi}{6}$ のとき，すなわち，$\tan\alpha < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき．



このとき，$b > \sqrt{2}a$ であり，S は $2\theta + \alpha = \dfrac{\pi}{3} + \alpha$ のとき，すなわち，$\theta = \dfrac{\pi}{6}$ のときに最大値 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}b^2 + \dfrac{ab}{2}$ をとる．

(i)，(ii) より，S のとりうる値の最大値は，

$$\begin{cases} a \leqq b \leqq \sqrt{2}a \text{ のとき，} & \dfrac{\sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4}}{2} + \dfrac{ab}{2}, \\ b > \sqrt{2}a \text{ のとき，} & \dfrac{\sqrt{3}}{4}b^2 + \dfrac{ab}{2}. \end{cases} \qquad \cdots(\text{答})$$

【(2) の参考】

θ のとりうる値の範囲が $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{6}$ であることを踏まえ，微分法を用いて S の最大値を求めると，次のようになる．

$S = \dfrac{a^2}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{3} - 2\theta\right) + \dfrac{b^2}{2}\sin 2\theta + \dfrac{ab}{2}$ より，

$$\frac{dS}{d\theta} = -a^2\cos\left(\frac{\pi}{3} - 2\theta\right) + b^2\cos 2\theta = \frac{2b^2 - a^2}{2}\cos 2\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}a^2\sin 2\theta$$

$$= \frac{\sqrt{3}a^2\cos 2\theta}{2}\left(\frac{2b^2 - a^2}{\sqrt{3}a^2} - \tan 2\theta\right).$$

第３問（つづき３）

$0 < a \leqq b$ により，$2b^2 - a^2 > 0$，$\sqrt{3}a^2 > 0$ であるから，$\tan\theta_0 = \dfrac{2b^2 - a^2}{\sqrt{3}a^2}$ を満たす鋭角 θ_0 が存在するので，S の増減は次のようになる．

(I) $\theta_0 \geqq \dfrac{\pi}{6}$ のとき，すなわち，$\tan 2\theta_0 \geqq \sqrt{3}$ のとき．

このとき，$b \geqq \sqrt{2}a$ であり，S の増減は次のようになる．

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$
$\frac{dS}{d\theta}$		$+$	
S		$\nearrow$	

よって，S は $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ のときに最大値 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}b^2 + \dfrac{ab}{2}$ をとる．

(II) $\theta_0 < \dfrac{\pi}{6}$ のとき，すなわち，$\tan 2\theta_0 < \sqrt{3}$ のとき．

このとき，$a \leqq b < \sqrt{2}a$ であり，S の増減は次のようになる．

θ	0	$\cdots$	θ_0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$
$\frac{dS}{d\theta}$		$+$	0	$-$	
S		$\nearrow$		$\searrow$	

よって，S は $\theta = \theta_0$ のときに最大値

$$\frac{a^2}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3} - 2\theta_0\right) + \frac{b^2}{2}\sin 2\theta_0 + \frac{ab}{2}$$

$$= \frac{2b^2 - a^2}{4}\sin 2\theta_0 + \frac{\sqrt{3}}{4}a^2\cos 2\theta_0 + \frac{ab}{2}$$

$$= \frac{2b^2 - a^2}{4}\cdot\frac{2b^2 - a^2}{\sqrt{(2b^2 - a^2)^2 + \left(\sqrt{3}a^2\right)^2}} + \frac{\sqrt{3}}{4}a^2\cdot\frac{\sqrt{3}a^2}{\sqrt{(2b^2 - a^2)^2 + \left(\sqrt{3}a^2\right)^2}} + \frac{ab}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4}}{2} + \frac{ab}{2}$$

をとる．

（(2) の参考終り）

第 4 問

（1） 背理法で示す．

$f_a(n)$ が平方数であり，$n > a$とすると，

$$f_a(n) = n^2 + n - a > n^2$$

が成り立つ．また，$a \geqq 1$ なので，

$$f_a(n) = n^2 + n - a \leqq n^2 + n - 1 < n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

が成り立つ．よって

$$n^2 < f_a(n) < (n+1)^2$$

となるが，n^2 と $(n+1)^2$ の間には平方数はないので，$f_a(n)$ が平方数であることに反する．

したがって，$f_a(n)$ が平方数であれば，$n \leqq a$ が成り立つ．

（証明終り）

(2) $f_a(n)$ が平方数であるとき，0 以上の整数 m を用いて，

$$f_a(n) = n^2 + n - a = m^2$$

と表せる．n の2次式を平方完成して，

$$\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - a = m^2$$

$$(2n+1)^2 - (2m)^2 = 4a + 1$$

$$(2n + 1 - 2m)(2n + 1 + 2m) = 4a + 1. \quad \cdots①$$

①を満たす正の整数 n の個数が N_a である．

・(ii) ⇒ (i) を示す．

$4a + 1$ が素数 p であるとすると，①は

$$(2n + 1 - 2m)(2n + 1 + 2m) = p$$

となり，$2n + 1 - 2m < 2n + 1 + 2m$ に注意すると，これを満たす n, m は，

$$2n + 1 - 2m = 1, \quad 2n + 1 + 2m = p$$

に限られる．これを解くと，

$$m = n = \frac{p-1}{4} = a$$

となり，①を満たす n はただ 1 つ存在するので，$N_a = 1$.

第 4 問　（つづき）

・(i) ⇒ (ii) を背理法で示す．

$N_a=1$ であり，$4a+1$ が素数でないとすると，3以上の整数 p,q（$p \leqq q$）があり，

$$4a+1=pq$$

と表せる．

①から，

$$(2n+1-2m)(2n+1+2m)=pq$$

これを満たす n,m は，少なくとも次の2つの場合がある．

$$2n+1-2m=1,\ 2n+1+2m=pq \quad \cdots②$$

$$2n+1-2m=p,\quad 2n+1+2m=q \quad \cdots③$$

②を解くと，先にみたように，$n=m=a$ となる．

③を解くと，

$$n=\frac{p+q-2}{4},\quad m=\frac{q-p}{4}$$

ここで，$4a+1=pq$ であったから，p と q を4で割った余りは等しいので，n は正の整数、m は 0 以上の整数になる．

（pq は奇数なので，p と q は奇数である． 4 を法として，$p\equiv 1,q\equiv 3$ とすると，$pq\equiv 3$となり，$4a+1=pq$ に反する． $p\equiv 3,q\equiv 1$ としても反する．よって，p と q を4で割った余りは等しい）

また，

$$a-n=\frac{pq-1}{4}-\frac{p+q-2}{4}=\frac{(p-1)(q-1)}{4}>0$$

から，$n<a$ となり，②と③を満たす n の値は異なる．したがって，$N_a \geqq 2$ となり，$N_a=1$ に反する．

よって，$4a+1$ は素数である．

以上によって，(i)と(ii)が同値であることが示された．　　　　（証明終り）

第5問

(1) A_1 と A_2 の大小関係によって場合分けを行う．

(i) $A_1 < A_2$ のとき

最初の操作 (T_1) で左端2枚の札は入れかわらないので，最後の操作 (T_1) が行われるまで左端の札に書かれた数字は A_1 である．よって，全ての操作が終わったとき，A_1 が書かれた札は左から1番目または2番目である．このとき，札に書かれた数字は左から $1, 2, \ldots, n$ となっているので，$A_1 = 1$ または $A_1 = 2$ である．

(ii) $A_1 > A_2$ のとき

最初の操作 (T_1) で左端2枚の札は入れかわるので，最後の操作 (T_1) が行われるまで左端の札に書かれた数字は A_2 である．(i) と同様の理由で $A_2 = 1$ または $A_2 = 2$ である．

(i)，(ii) から，A_1，A_2 の少なくとも一方は1か2である．　（証明終り）

(2) A_1 と A_2 のどちらが1または2になるかで場合分けを行う．

(i) $A_1 = 1$ のとき

最初と最後の操作 (T_1) で札は入れかわらないので，操作 $(\mathrm{T}_2), \ldots, (\mathrm{T}_{n-1})$, $(\mathrm{T}_{n-1}), \ldots, (\mathrm{T}_2)$ を順に行ったとき, $1, 2, \ldots, n$ の並びになればよい．すなわち, $(n-1)$ 個の数字の並び $A_2, A_3, \ldots, A_n$ に操作 $(\mathrm{T}_1), \ldots, (\mathrm{T}_{n-2}), (\mathrm{T}_{n-2}), \ldots,$ (T_1) を順に行ったとき，$2, 3, \ldots, n$ の並びになればよい．$(2, 3, \ldots, n)$ を $(1, 2, \ldots, n-1)$ に置き換えても各操作 (T_i) によって入れかわる札は変わらないので，このような $A_2, A_3, \ldots, A_n$ の数字の並びは c_{n-1} 通りある．

$$1\ A_2\ \cdots\ A_n \quad \xrightarrow{(\mathrm{T}_2),\ldots,(\mathrm{T}_2)} \quad 1\ 2\ \cdots\ n$$

(ii) $A_2 = 1$ のとき

最初の操作 (T_1) で左端2枚の札は入れかわり，最後の操作 (T_1) で札は入れかわらない．すると $1, A_1, A_3, \ldots, A_n$ に操作 $(\mathrm{T}_2), \ldots, (\mathrm{T}_{n-1}), (\mathrm{T}_{n-1}), \ldots, (\mathrm{T}_2)$ を順に行ったとき，$1, 2, 3, \ldots, n$ の並びになればよい．すなわち，$(n-1)$ 個の数字の並び $A_1, A_3, \ldots, A_n$ に操作 $(\mathrm{T}_1), \ldots, (\mathrm{T}_{n-2}), (\mathrm{T}_{n-2}), \ldots, (\mathrm{T}_1)$ を順に行ったとき，$2, 3, \ldots, n$ の並びになればよく，(i) と同様に考えればこのような $A_1, A_3, \ldots, A_n$ の数字の並びは c_{n-1} 通りある．

$$A_1\ 1\ A_3\ \cdots\ A_n \xrightarrow{(\mathrm{T}_1)} 1\ A_1\ A_3\ \cdots\ A_n \xrightarrow{(\mathrm{T}_2),\ldots,(\mathrm{T}_2)} 1\ 2\ 3\ \cdots\ n$$

第５問（つづき１）

(iii) $A_1=2$ のとき

(iii-a) $A_1=2$ かつ $A_2=1$ のとき

最初の操作 (T_1) で左端２枚の札は入れかわり，最後の操作 (T_1) で札は入れかわらない．すると，$1,2,A_3,\ldots,A_n$ に操作 $(\mathrm{T}_2),\ldots,(\mathrm{T}_{n-1}),(\mathrm{T}_{n-1}),\ldots,(\mathrm{T}_2)$ を順に行ったとき，$1,2,3,\ldots,n$ の並びになればよい．

$$2\ 1\ A_3\ \cdots\ A_n \xrightarrow{(\mathrm{T}_1)} 1\ 2\ A_3\ \cdots\ A_n \xrightarrow{(\mathrm{T}_2),\ldots,(\mathrm{T}_2)} 1\ 2\ 3\ \cdots\ n$$

(iii-b) $A_1=2$ かつ $A_2\neq 1$ のとき

$A_2>2$ なので最初の操作 (T_1) で札は入れかわらず，最後の操作 (T_1) で左端２枚の札は入れかわる．すると，$2,A_2,A_3,\ldots,A_n$ に操作 $(\mathrm{T}_2),\ldots,(\mathrm{T}_{n-1}),(\mathrm{T}_{n-1}),\ldots,(\mathrm{T}_2)$ を順に行ったとき，$2,1,3,\ldots,n$ の並びになればよい．

$$2\ A_2\ A_3\ \cdots\ A_n \xrightarrow{(\mathrm{T}_2),\ldots,(\mathrm{T}_2)} 2\ 1\ 3\ \cdots\ n \xrightarrow{(\mathrm{T}_1)} 1\ 2\ 3\ \cdots\ n$$

(iii-a) および (iii-b) より，$A_1=2$ のときは A_2 の値によらず $(n-1)$ 個の数字の並び $A_2,A_3,\ldots,A_n$ に操作 $(\mathrm{T}_1),\ldots,(\mathrm{T}_{n-2}),(\mathrm{T}_{n-2}),\ldots,(\mathrm{T}_1)$ を順に行ったとき，$1,3,\ldots,n$ の並びになればよい．$(1,3,\ldots,n)$ を $(1,2,\ldots,n-1)$ に置き換えて考えれば，そのような $A_2,A_3,\ldots,A_n$ の数字の並びは c_{n-1} 通りある．

(iv) $A_2=2$ のとき

(iv-a) $A_2=2$ かつ $A_1=1$ のとき

最初と最後の操作 (T_1) で札は入れかわらない．すると $1,2,A_3,\ldots,A_n$ に操作 $(\mathrm{T}_2),\ldots,(\mathrm{T}_{n-1}),(\mathrm{T}_{n-1}),\ldots,(\mathrm{T}_2)$ を順に行ったとき，$1,2,3,\ldots,n$ の並びになればよい．

$$1\ 2\ A_3\ \cdots\ A_n \xrightarrow{(\mathrm{T}_2),\ldots,(\mathrm{T}_2)} 1\ 2\ 3\ \cdots\ n$$

(iv-b) $A_2=2$ かつ $A_1\neq 1$ のとき

$A_1>2$ なので最初と最後の操作 (T_1) で左端の２枚の札は入れかわる．すると，$2,A_1,A_3,\ldots,A_n$ に操作 $(\mathrm{T}_2),\ldots,(\mathrm{T}_{n-1}),(\mathrm{T}_{n-1}),\ldots,(\mathrm{T}_2)$ を順に行ったとき，$2,1,3,\ldots,n$ の並びになればよい．

$$A_1\ 2\ A_3\ \cdots\ A_n \xrightarrow{(\mathrm{T}_1)} 2\ A_1\ A_3\ \cdots\ A_n \xrightarrow{(\mathrm{T}_2),\ldots,(\mathrm{T}_2)} 2\ 1\ 3\ \cdots\ n$$
$$\xrightarrow{(\mathrm{T}_1)} 1\ 2\ 3\ \cdots\ n$$

第５問（つづき２）

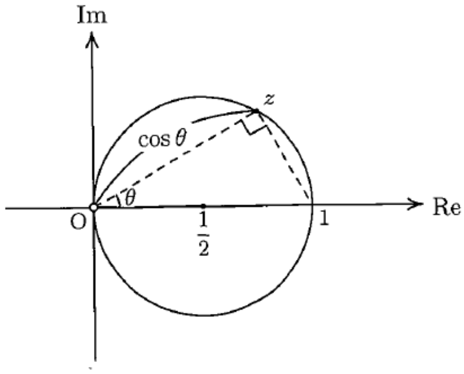
(iv-a) および (iv-b) より，$A_2=2$ のときは A_1 の値によらず $(n-1)$ 個の数字の並び $A_1, A_3, \ldots, A_n$ に操作 $(\mathrm{T}_1), \ldots, (\mathrm{T}_{n-2}), (\mathrm{T}_{n-2}), \ldots, (\mathrm{T}_1)$ を順に行ったとき，$1, 3, \ldots, n$ の並びになればよい．$(1, 3, \ldots, n)$ を $(1, 2, \ldots, n-1)$ に置き換えて考えれば，そのような $A_1, A_3, \ldots, A_n$ の数字の並びは c_{n-1} 通りある．

上の場合分けのうち，(i) と (iv) は (iv-a) の場合を，(ii) と (iii) は (iii-a) の場合をそれぞれ重複して数えている．また，(iv-a) と (iii-a) のどちらの場合も $(n-2)$ 個の数字の並び $A_3, A_4, \ldots, A_n$ に操作 $(\mathrm{T}_1), \ldots, (\mathrm{T}_{n-3}), (\mathrm{T}_{n-3}), \ldots, (\mathrm{T}_1)$ を順に行ったとき，$3, 4, \ldots, n$ の並びになればよい．$(3, 4, \ldots, n)$ を $(1, 2, \ldots, n-2)$ に置き換えて考えれば，そのような $A_3, A_4, \ldots, A_n$ の数字の並びは c_{n-2} 通りある．

ゆえに，$c_n = 4c_{n-1} - 2c_{n-2}$．　　　　$\cdots$（答）

第 6 問

(1)　$-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ を満たす θ を用いて,



$$z=\cos\theta\,(\cos\theta+i\sin\theta)$$

と表されるので,

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{\cos\theta\,(\cos\theta+i\sin\theta)}$$
$$=\frac{\cos\theta-i\sin\theta}{\cos\theta}$$
$$=1-i\tan\theta.$$

よって，題意が示された.　　（証明終り）

※）$-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ のとき，$\frac{1}{z}$ の虚部 $-\tan\theta$ のとりうる値の範囲は実数全体である.

【(1)別解 1】

点 w が $\dfrac{1}{z}$ の軌跡に属す.

$\Leftrightarrow \left|z-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$ かつ $z\neq 0$ かつ $\frac{1}{z}=w$ なる複素数 z がある.

$\Leftrightarrow \left|\frac{1}{w}-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}.$

$\Leftrightarrow |2-w|=|w|.$

よって，点 w の軌跡は 2 点 0, 2 を結ぶ線分の垂直二等分線であるから，$\frac{1}{z}$ の実部は 1 である.

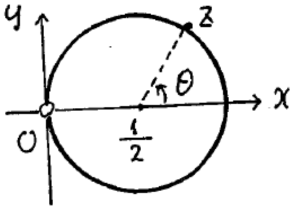
（証明終り）

第６問（つづき１）

【(1)別解 2】

$-\pi<\theta<\pi$ を満たす θ を用いて,

$$z=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{i}{2}\sin\theta$$



と表されるので,

$$\frac{1}{z}=\frac{2}{1+\cos\theta+i\sin\theta}$$

$$=\frac{2(1+\cos\theta-i\sin\theta)}{(1+\cos\theta)^2+\sin^2\theta}$$

$$=\frac{2+2\cos\theta-2i\sin\theta}{2+2\cos\theta}$$

$$=1+\frac{-\sin\theta}{1+\cos\theta}i$$

であるから, 題意が示された.　（証明終り）

※）$\mathrm{Im}\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{-\sin\theta}{1+\cos\theta}=\frac{-2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}=-\tan\frac{\theta}{2}$ であり, $-\pi<\theta<\pi$ のときの $-\tan\frac{\theta}{2}$ のとりうる値の範囲は実数全体である.

【(1)別解 3】

$\left|z-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$ から, $z\bar{z}-\frac{1}{2}(z+\bar{z})=0$.

$z\neq 0$ なので、$z\bar{z}$ で割って、 $\dfrac{\frac{1}{z}+\frac{1}{\bar{z}}}{2}=1$

よって、$\frac{1}{z}$ の実部は 1 である.　（証明終り）

（この場合は、(2)を解くために虚部がすべての実数をとりうることを別途確認する必要がある。）

(2)　(1)より, 異なる実数 s,t を用いて

$$\frac{1}{\alpha}=1+si,\ \ \frac{1}{\beta}=1+ti$$

と表され, このとき,

第６問（つづき２）

$$\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=(1+si)^2+(1+ti)^2$$
$$=2-(s^2+t^2)+2(s+t)i.$$

よって，実数 X, Y に対して，

$X+Yi$ が $\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}$ のとりうる範囲に属す.

$\Leftrightarrow 2-(s^2+t^2)=X$ かつ $2(s+t)=Y$ かつ $s \neq t$ なる実数 s, t がある.

$\Leftrightarrow 2-\{(s+t)^2-2st\}=X$ かつ $s+t=\dfrac{Y}{2}$ かつ$s \neq t$ なる実数 s, t がある.

$\Leftrightarrow$ $s+t=\dfrac{Y}{2}$ かつ $st=\dfrac{X}{2}+\dfrac{Y^2}{8}-1$ かつ$s \neq t$ なる実数 s, t がある.

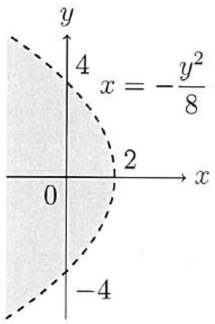
$\Leftrightarrow$ uの 2 次方程式 $u^2-\dfrac{Y}{2}u+\dfrac{X}{2}+\dfrac{Y^2}{8}-1=0$ が異なる 2 個の実数解をもつ.

$\Leftrightarrow \dfrac{Y^2}{4}-2X-\dfrac{Y^2}{2}+4>0.$

$\Leftrightarrow$ $X<-\dfrac{Y^2}{8}+2.$

よって，$\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}$ がとりうる範囲は

右図の斜線部(境界を含まない)である.



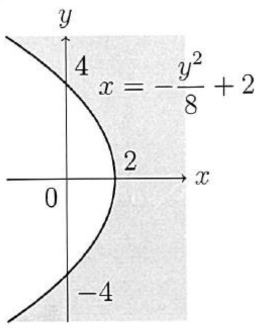
…(答)

(3)　(2)より，

$$x \geqq -\frac{y^2}{8}+2 \qquad \cdots①$$

を満たす実数 x, y を用いて $\gamma=x+yi$ と表され，

このとき，



$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\gamma}\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{1}{x+yi}\right)$$
$$=\mathrm{Re}\left(\frac{x-yi}{x^2+y^2}\right)$$
$$=\frac{x}{x^2+y^2}.$$

最大値について

第6問（つづき3）

$$x \leqq 0 \text{ のとき } \mathrm{Re}\left(\frac{1}{\gamma}\right) \leqq 0,\ x > 0 \text{ のとき } \mathrm{Re}\left(\frac{1}{\gamma}\right) > 0 \qquad \cdots②$$

より，$x > 0$ のときを考えれば十分.

（Ⅰ）　$0 < x \leqq 2$ のとき，x を固定すると，①より，$y^2 = 16 - 8x$ のとき最大値は,

$$\frac{x}{x^2 + 16 - 8x} = \frac{x}{(x-4)^2}$$

次に，$f(x) = \frac{x}{(x-4)^2}$ とおいて x を動かす.

$$f'(x) = \frac{(x-4)^2 - 2x(x-4)}{(x-4)^4}$$

$$= \frac{-(x-4)(x+4)}{(x-4)^4}$$

$$> 0 \quad (0 < x \leqq 2 \text{より})$$

より，$f(x)$ は単調に増加するので，最大値は,

$$f(2) = \frac{1}{2}.$$

（Ⅱ）　$x \geqq 2$のとき，x を固定すると，①より，$y^2 = 0$ のとき最大値は,

$$\frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}.$$

次に，x を動かすと，$x = 2$ のとき最大値は $\frac{1}{2}$ である.

以上(Ⅰ)，(Ⅱ)より，最大値は,

$$\frac{1}{2}. \qquad \cdots(\text{答})$$

最小値について

②より，$x \leqq 0$ のときを考えれば十分.

x を固定すると，①から，$y^2 = 16 - 8x$ のとき最小値は,

$$\frac{x}{x^2 + 16 - 8x} (= f(x)).$$

$f(x)$ の増減は次のとおり.

第６問（つづき４）

x	$\cdots$	-4	$\cdots$	0
$f'(x)$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{1}{16}$	$\nearrow$	

よって，最小値は，

$$-\frac{1}{16}.$$ …(答)

第6問（つづき5）

【(3)の別解】

(2)の結果から

$$\gamma = X + iY \quad \left(X,\ Y \text{は実数で}\ X \geqq -\frac{Y^2}{8} + 2 \right)$$

と表される．$\gamma \neq 0$ であり

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{X+iY} = \frac{X-iY}{X^2+Y^2}$$

$X=0$ であれば $\frac{1}{\gamma}$ の実部 $\frac{X}{X^2+Y^2}$ は 0 となる．

$X \neq 0$ であれば $\frac{X}{X^2+Y^2} = \frac{1}{k}$ （k は 0 でない実数）とおけ

$$X^2 + Y^2 = kX \qquad \cdots③$$

そこで条件

$$Y^2 + 8X \geqq 16 \qquad \cdots④$$

と合わせ，

「③，④を満たす実数 X，Y が存在する」　$\cdots(※)$

ような $k\ (\neq 0)$ の範囲を求める．③より

$$Y^2 = kX - X^2 = X(k - X) \qquad \cdots③'$$

④に代入し

$$-X^2 + (k+8)X \geqq 16$$

整理して $X^2 - (k+8)X + 16 \leqq 0$．この左辺を $g(X)$ とおくと

$$\begin{aligned} g(X) &= X^2 - (k+8)X + 16 \\ &= \left(X - \frac{k+8}{2} \right)^2 + \frac{-k^2 - 16k}{4} \end{aligned}$$

また③$'$において実数 Y が存在する条件（$Y^2 \geqq 0$）は

$$\begin{cases} (ア)\ k > 0 \text{ のとき} & 0 < X \leqq k \\ (イ)\ k < 0 \text{ のとき} & k \leqq X < 0 \end{cases}$$

したがって，(※)は次のように書き直すことができる．

第6問（つづき6）

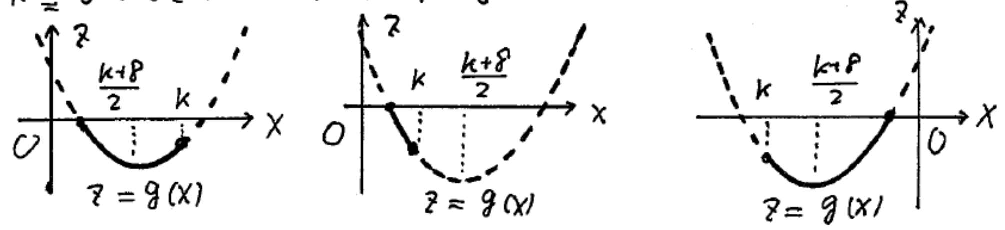
$\begin{cases} (ア)\ k>0 \text{ のとき } g(X) \leqq 0 \text{ かつ } 0<X \leqq k \text{ を満たす } X \text{ が存在する} \\ (イ)\ k<0 \text{ のとき } g(X) \leqq 0 \text{ かつ } k \leqq X<0 \text{ を満たす } X \text{ が存在する} \end{cases}$

放物線 $Z=g(X)$ の軸 $X=\dfrac{k+8}{2}$ と k の大小について，例えば

$$\frac{k+8}{2}<k \iff k>8$$

となること，$g(0)=16>0$ に注目し $Z=g(X)$ のグラフを考察する．

(i) $k \geqq 8$ のとき　　(ii) $0<k<8$ のとき　　(iii) $k<0$ のとき



(i) $k \geqq 8$ のとき　(*)の成立条件は

$$\text{頂点の}Z\text{座標}\quad \frac{-k(k+16)}{4} \leqq 0$$

$k \geqq 8$ との共通範囲は　$k \geqq 8$

(ii) $0<k<8$ のとき　(*)の成立条件は

$$g(k)=-8k+16 \leqq 0$$

よって　$2 \leqq k<8$

(iii) $k<0$ のとき　(*)の成立条件は

$$\text{頂点の}Z\text{座標}\quad \frac{-k(k+16)}{4} \leqq 0$$

$k<0$ と合わせて　$k \leqq -16$

(i), (ii), (iii) により

$$(*) \iff k \leqq -16,\ 2 \leqq k$$

このとき実部 $\dfrac{1}{k}$ の範囲は　$-\dfrac{1}{16} \leqq \dfrac{1}{k} \leqq \dfrac{1}{2}$　$\left(\dfrac{1}{k} \neq 0\right)$

$X=0$ のときの実部は 0 であることと合わせ，$\dfrac{1}{r}$ の実部の

最大値は $\dfrac{1}{2}$，最小値は $-\dfrac{1}{16}$ …(答)