I

〔1〕 2 月の降水量の平均値は以下の通りである．

A 地点　$\frac{1}{6}\{2(30+20+10)\}=20$,

B 地点　$\frac{1}{6}\{2(90+100+110)\}=100$,

C 地点　$\frac{1}{6}\{2(80+100+120)\}=100$,

D 地点　$\frac{1}{6}\{2(30+50+70)\}=50$.

よって，偏差の値 (降水量を x , 平均値を $\overline{x}$ としたときの $x-\overline{x}$ の値) は，次表のようになる．

	A 地点	B 地点	C 地点	D 地点
2019 年	10	−10	20	−20
2020 年	10	0	0	0
2021 年	0	10	−20	20
2022 年	0	10	20	−20
2023 年	−10	0	0	0
2024 年	−10	−10	−20	20

(1) 2 月の降水量の分散 (標準偏差の 2 乗) は以下の通りである．

A 地点　$\frac{1}{6}\{2(10^2+0^2+(-10)^2)\}=\frac{200}{3}$,

B 地点　$\frac{1}{6}\{2(10^2+0^2+(-10)^2)\}=\frac{200}{3}$,

C 地点　$\frac{1}{6}\{2(20^2+0^2+(-20)^2)\}=\frac{800}{3}$,

D 地点　$\frac{1}{6}\{2(20^2+0^2+(-20)^2)\}=\frac{800}{3}$.

よって，標準偏差が最も大きいのは ア $\boxed{\text{C}}$ 地点と イ $\boxed{\text{D}}$ 地点 ($\boxed{ア}$ と $\boxed{イ}$ は順不同) であり，その値は $\sqrt{\frac{800}{3}}=$ ウ $\boxed{\frac{20\sqrt{6}}{3}}$ である．これは最も小さい地点の標準偏差 $\sqrt{\frac{200}{3}}=\frac{10\sqrt{6}}{3}$ の エ $\boxed{2}$ 倍である．

(2) 標準偏差を平均値で割った値は,

A 地点　$\frac{\sqrt{6}}{6}$,　B 地点　$\frac{\sqrt{6}}{30}$,

C 地点　$\frac{\sqrt{6}}{15}$,　D 地点　$\frac{2\sqrt{6}}{15}$.

これが最も大きいのは オ $\boxed{\text{A}}$ 地点，最も小さいのは カ $\boxed{\text{B}}$ 地点である．

(3) A , B , C の各地点と D 地点の降水量の偏差の積とその合計は次表の通り．

	A と D	B と D	C と D
2019 年	−200	200	−400
2020 年	0	0	0
2021 年	0	200	−400
2022 年	0	−200	−400
2023 年	0	0	0
2024 年	−200	−200	−400
計	−400	0	−1600

よって，相関係数の値は

A と D の間　$\dfrac{\frac{-400}{6}}{\sqrt{\frac{200}{3}}\sqrt{\frac{800}{3}}}=-0.5$,

B と D の間　$\dfrac{\frac{0}{6}}{\sqrt{\frac{200}{3}}\sqrt{\frac{800}{3}}}=0$,

C と D の間　$\dfrac{\frac{-1600}{6}}{\sqrt{\frac{800}{3}}\sqrt{\frac{800}{3}}}=-1$.

したがって，D 地点との間に最も強い負の相関関係が見られるのは キ $\boxed{\text{C}}$ 地点であり，相関関係が見られないのは ク $\boxed{\text{B}}$ 地点である．

(4) 「正確な値」への修正により，降水量の変化は 2019 年が +4 mm , 2022 年が −4 mm であるが，降水量の総和は $(+4)+(-4)=0$ より変化しない．したがって，平均値は再計算する前 ケ $\boxed{③}$ と一致する．

一方，降水量の偏差は 2019 年が −10 mm から −6 mm へ，2022 年が +10 mm から +6 mm へ変化するため，偏差の 2 乗は再計算する前より小さくなる．よって，標準偏差は再計算する前 コ $\boxed{①}$ よりも減少する．

〔2〕(1)　$a=3$ のとき，

$$f(x)=3^x+3^{-x}\ ,\quad g(x)=3^x-3^{-x}$$

であるから，

$$\begin{aligned}f(2)+g(-2)&=(3^2+3^{-2})+(3^{-2}-3^2)\\&\overset{サ}{=}\boxed{\frac{2}{9}}\ ,\\ f\left(\frac{1}{2}\right)g\left(-\frac{1}{2}\right)&=\left(3^{\frac{1}{2}}+3^{-\frac{1}{2}}\right)\left(3^{-\frac{1}{2}}-3^{\frac{1}{2}}\right)\\&=\left(3^{-\frac{1}{2}}\right)^2-\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^2\\&=3^{-1}-3^1\\&\overset{シ}{=}\boxed{-\frac{8}{3}}\ ,\\ \{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2&=\{f(x)+g(x)\}\{f(x)-g(x)\}\\&=(2\cdot 3^x)\cdot(2\cdot 3^{-x})\\&\overset{ス}{=}\boxed{4}\ .\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}f(p)f(q)&=(a^p+a^{-p})(a^q+a^{-q})\\&=a^{p+q}+a^{p-q}+a^{-p+q}+a^{-p-q}\\&=a^{p+q}+a^{-(p+q)}+a^{p-q}+a^{-(p-q)}\\&=f(p+q)+f(p-q)\ ,\\ g(p)g(q)&=(a^p-a^{-p})(a^q-a^{-q})\\&=a^{p+q}-a^{p-q}-a^{-p+q}+a^{-p-q}\\&=a^{p+q}+a^{-(p+q)}-a^{p-q}-a^{-(p-q)}\\&=f(p+q)-f(p-q)\end{aligned}$$

であるから，$f(p)f(q)=12$, $g(p)g(q)=-8$ のとき，

$$f(p+q)+f(p-q)=12\ ,\ f(p+q)-f(p-q)=-8.$$

$$f(p+q)\overset{セ}{=}\boxed{2}\ ,\quad f(p-q)\overset{ソ}{=}\boxed{10}\ .$$

したがって，$r=p+q$, $s=p-q$ とおくと，

$$a^r+a^{-r}=2\ ,\quad a^s+a^{-s}=10\ .$$

$$(a^r)^2-2a^r+1=0\ ,\quad (a^s)^2-10a^s+1=0\ .$$

$$(a^r-1)^2=0\ ,\quad (a^s-5)^2=24\ .$$

よって，$a^r=1$ であるから $p+q=r\overset{タ}{=}\boxed{0}$.

また，$p>q$, $a>1$ のとき $a^{p-q}>1$ より，

$$a^{p-q}=a^s=5+2\sqrt{6}\ .$$

$p+q=0$ より $a^{p-q}=a^{2p}$ に注意すると，

$$a^p=\sqrt{5+2\sqrt{6}}\overset{チ}{=}\boxed{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\ .$$

〔3〕(1)　$x\geqq 0$ のときは，(a) , (b) , (c) いずれも

$$y=x(x-2)\ \text{すなわち}\ y=(x-1)^2-1\ .$$

$x\leqq 0$ のときは，

(a)　$y=x(-x-2)$ すなわち $y=-(x+1)^2+1$,

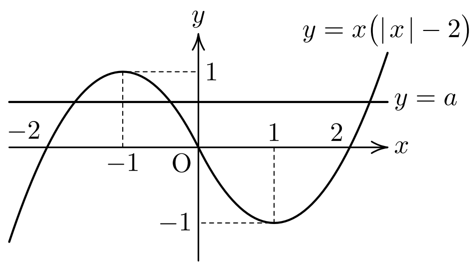
(b)　$y=-x(x-2)$ すなわち $y=-(x-1)^2+1$,

(c)　$y=-x(-x-2)$ すなわち $y=(x+1)^2-1$

であるから，該当するグラフは

(a) が$\overset{ツ}{}$ $\boxed{え}$,　(b) が$\overset{テ}{}$ $\boxed{い}$,　(c) が$\overset{ト}{}$ $\boxed{お}$.

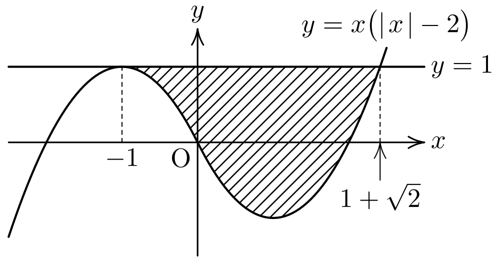
(2)　方程式 $x(|x|-2)=a$ の実数解の個数は，$y=x(|x|-2)$ のグラフと直線 $y=a$ の共有点の個数に一致する．



よって，その個数が 2 以上となる a の値の範囲は

$$\overset{ナ}{\boxed{-1}}\leqq a\overset{ニ}{\leqq}\boxed{1}\ .$$

(3)　求める面積 S は，次図斜線部の面積である．



$x>0$ で $x(|x|-2)=1$ となる x の値は，

$$x^2-2x-1=0\quad \text{かつ}\quad x>0$$

より $x=1+\sqrt{2}$ であるから，

$$\begin{aligned}S&=\int_{-1}^{0}\{1-x(-x-2)\}\,dx\\&\quad+\int_{0}^{1+\sqrt{2}}\{1-x(x-2)\}\,dx\\&=\left[\frac{x^3}{3}+x^2+x\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{x^3}{3}+x^2+x\right]_{0}^{1+\sqrt{2}}\\&\overset{ヌ}{=}\boxed{\frac{6+4\sqrt{2}}{3}}\ .\end{aligned}$$

II

〔1〕 $0<x\leqq a$ のとき，マイバックを持参すると回答する確率は

$$\frac{\overset{ア}{\boxed{x+2}}}{\underset{イ}{\boxed{a+2}}},$$

レジ袋を購入すると回答する確率は

$$1-\frac{x+2}{a+2}=\frac{\overset{ウ}{\boxed{a-x}}}{\underset{エ}{\boxed{a+2}}}.$$

〔2〕 1 人の顧客について，マイバックを持参すると回答する確率が p であるから，

$$P={}_{20}\mathrm{C}_{10}p^{10}(1-p)^{10}={}_{20}\mathrm{C}_{10}\{p(1-p)\}^{10}.$$

$x=4$ ($<a$) のとき $p=\dfrac{6}{a+2}$ であるから，

$$p(1-p)=\frac{6}{a+2}\cdot\frac{a-4}{a+2}=\frac{\overset{オ}{\boxed{6(a-4)}}}{\underset{カ}{\boxed{(a+2)^2}}}.$$

ここで，

$$\begin{aligned}\frac{6(a-4)}{(a+2)^2}&=\frac{6(a-4)}{\{(a-4)+6\}^2}\\&=\frac{6\left(\overset{キ}{\boxed{a-4}}\right)}{(a-4)^2+\overset{ク}{\boxed{12}}(a-4)+\overset{ケ}{\boxed{36}}}\\&=\frac{6}{(a-4)+\dfrac{36}{a-4}+12}\end{aligned}$$

であり，相加平均と相乗平均の大小関係より，

$$(a-4)+\frac{36}{a-4}\geqq 2\sqrt{(a-4)\cdot\frac{36}{a-4}}=12.$$

ここで，等号は

$$a-4=\frac{36}{a-4}\quad かつ\quad a-4>0$$

より，

$$a-4=6\quad すなわち\quad a=10$$

のとき成立する．

よって，$a\overset{コ}{=}\boxed{10}$ のとき $\dfrac{6(a-4)}{(a+2)^2}$ は最大値

$$\frac{6}{12+12}\overset{サ}{=}\boxed{\frac{1}{4}}$$

をとり，このとき P も最大となる．

〔3〕 $x=2$ ($<a$) のとき $p=\dfrac{4}{a+2}$ であるから，

$$p(1-p)=\frac{4}{a+2}\cdot\frac{a-2}{a+2}=\frac{\overset{シ}{\boxed{4(a-2)}}}{\underset{ス}{\boxed{(a+2)^2}}}.$$

ここで,〔2〕と同様に

$$\begin{aligned}\frac{4(a-2)}{(a+2)^2}&=\frac{4(a-2)}{\{(a-2)+4\}^2}\\&=\frac{4(a-2)}{(a-2)^2+8(a-2)+16}\\&=\frac{4}{(a-2)+\dfrac{16}{a-4}+8}\end{aligned}$$

であり，相加平均と相乗平均の大小関係より，

$$(a-2)+\frac{16}{a-2}\geqq 2\sqrt{(a-2)\cdot\frac{16}{a-2}}=8.$$

ここで，等号は

$$a-2=\frac{16}{a-2}\quad かつ\quad a-2>2$$

より，

$$a-2=4\quad すなわち\quad a=6$$

のとき成立する．

よって，$a\overset{セ}{=}\boxed{6}$ のとき $\dfrac{4(a-2)}{(a+2)^2}$ は最大値

$$\frac{4}{8+8}\overset{ソ}{=}\boxed{\frac{1}{4}}$$

をとり，このとき P も最大となる．

$a=6$ のとき，マイバックを持参する人の割合を 75 % 以上にするには，

$$x>6\ (=a)\quad または$$
$$0<x\leqq 6\ かつ\ \frac{x+2}{6+2}\geqq\frac{75}{100}$$

すなわち

$$x\overset{タ}{\geqq}\boxed{4}\ 円$$

にすればよい．

(注) $p(1-p)=-\left(p-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}$ であるから，$\dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}$ や $\dfrac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}$ の最大値が $\dfrac{1}{4}$ であることは，ある意味当然．また，$\boxed{コ}$，$\boxed{セ}$ は $p=\dfrac{1}{2}$ となる a の値に相当．

III

〔1〕 S の方程式は

$$(x-a)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=5 \qquad \cdots ①$$

と変形できるから，S の

中心 P は $\boldsymbol{(a,\ 1,\ 1)}$，　半径は $\boldsymbol{\sqrt{5}}$.　$\cdots$(答)

〔2〕 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=t\vec{v}$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\vec{v}\ .$$

$$\begin{aligned}(x,\ y,\ z)&=(2,\ 1,\ 1)+t(1,\ -2,\ -1)\\&=(2+t,\ 1-2t,\ 1-t)\ . \qquad \cdots ②\end{aligned}$$

よって，

$$x=\boldsymbol{2+t}\ ,\ y=\boldsymbol{1-2t}\ ,\ z=\boldsymbol{1-t}\ . \qquad \cdots(\text{答})$$

〔3〕 S と ℓ の共有点の座標は，① と ② をともに満たす実数の組 $(x,\ y,\ z)$ である．

② を ① に代入すると，

$$(2+t-a)^2+(-2t)^2+(-t)^2=5\ .$$

$$6t^2-2(a-2)t+\{(a-2)^2-5\}=0\ . \qquad \cdots ③$$

S と ℓ が異なる 2 点で交わる条件は，t の 2 次方程式 ③ が異なる 2 つの実数解を持つこと，すなわち，③ の判別式が正であることである．

$$\begin{aligned}\frac{(\text{③ の判別式})}{4}&=(a-2)^2-6\{(a-2)^2-5\}\\&=30-5(a-2)^2\\&=5\{6-(a-2)^2\}\end{aligned}$$

であるから，a の満たすべき条件は

$$(a-2)^2<6$$

すなわち

$$\boldsymbol{2-\sqrt{6}<a<2+\sqrt{6}}\ . \qquad \cdots(\text{答})$$

〔4〕 $\mathrm{PQ}=\mathrm{PR}=(\ S\text{ の半径 })=\sqrt{5}$ であるから，

$$\triangle\mathrm{PQR}=\frac{1}{2}\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{PR}\sin\angle\mathrm{QPR}=\frac{5}{2}\sin\angle\mathrm{QPR}\ .$$

一方,〔3〕のとき，③ の異なる 2 実解を α , β とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\alpha\vec{v}\ ,\quad \overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\vec{v}$$

と表せるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{QR}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(\beta-\alpha)\vec{v}\ .$$

$$\mathrm{QR}=|\beta-\alpha||\vec{v}|\ .$$

ここで，α , β は ③ の解

$$t=\frac{(a-2)\pm\sqrt{5\{6-(a-2)^2\}}}{6}$$

であるから，

$$|\beta-\alpha|=\frac{\sqrt{5\{6-(a-2)^2\}}}{3}\ .$$

また，

$$|\vec{v}|=\sqrt{1^2+(-2)^2+(-1)^2}=\sqrt{6}\ .$$

よって，$\angle\mathrm{QPR}=90^\circ$ すなわち $\mathrm{QR}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}$ となる条件は，

$$\frac{\sqrt{5\{6-(a-2)^2\}}}{3}\cdot\sqrt{6}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}\ .$$

$$6-(a-2)^2=3\ .$$

$$a=2\pm\sqrt{3}\ .$$

よって，$\angle\mathrm{QPR}=90^\circ$ となる a が存在するから，$\triangle\mathrm{PQR}$ の最大値は

$$\frac{5}{2}\sin 90^\circ=\boldsymbol{\frac{5}{2}}\ . \qquad \cdots(\text{答})$$

〔5〕 また，$\triangle\mathrm{PQR}$ が最大となる a の値は

$$a=\boldsymbol{2\pm\sqrt{3}}\ . \qquad \cdots(\text{答})$$