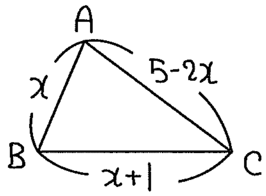
Ⅰ

$AB=x$ とおくと，

$$BC=AB+1=\boxed{x+1}^{\text{ア}},$$

$$CA=6-(AB+BC)=\boxed{5-2x}^{\text{イ}}.$$



三角形が成立する条件より，

$$|(x+1)-x|<5-2x<(x+1)+x$$

すなわち

$$1<5-2x<2x+1.$$

これを解いて，

$$\boxed{1}^{\text{ウ}}<x<\boxed{2}^{\text{エ}}.$$

余弦定理より，

$$\cos B=\frac{AB^2+BC^2-CA^2}{2AB\cdot BC}$$

であるから，

$$AB\cdot BC\cos B=\frac{AB^2+BC^2-CA^2}{2}$$

$$=\frac{x^2+(x+1)^2-(5-2x)^2}{2}$$

$$=\frac{-2x^2+22x-24}{2}$$

$$=\boxed{-x^2+11x-12}^{\text{オ}}.$$

$$AB^2\cdot BC^2\sin^2 B=AB^2\cdot BC^2(1-\cos^2 B)$$

$$=x^2(x+1)^2-(-x^2+11x-12)^2$$

$$=24(x^3-6x^2+11x-6)$$

$$=\boxed{24(x-1)(x-2)(x-3)}^{\text{カ}}.$$

$\triangle ABC$ の面積は，

$$\frac{1}{2}AB\cdot BC\sin B=\frac{1}{2}\sqrt{AB^2\cdot BC^2\sin^2 B}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{24(x-1)(x-2)(x-3)}$$

$$=\boxed{\sqrt{6(x-1)(x-2)(x-3)}}^{\text{キ}}.$$

$$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)\ (=x^3-6x^2+11x-6)$$

とおくと，

$$f'(x)=3x^2-12x+11$$

$$=3\left(x-\frac{6-\sqrt{3}}{3}\right)\left(x-\frac{6+\sqrt{3}}{3}\right).$$

$1<x<2$ における $f(x)$ の増減は次のようになる。

x	$(1)\cdots$	$\frac{6-\sqrt{3}}{3}$	$\cdots(2)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$

よって，$1<x<2$ において，

$f(x)$ は $x=\frac{6-\sqrt{3}}{3}$ のとき最大値をとる。

$\triangle ABC$ の面積が最大となるのは $f(x)$ が最大となるとき，すなわち $x=\boxed{\frac{6-\sqrt{3}}{3}}^{\text{ク}}$ のときであり，

求める最大値は，

$$\sqrt{6f\left(\frac{6-\sqrt{3}}{3}\right)}=\sqrt{6\cdot\frac{3-\sqrt{3}}{3}\cdot\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)\cdot\frac{-3-\sqrt{3}}{3}}$$

$$=\sqrt{\frac{6\cdot 6\sqrt{3}}{27}}$$

$$=\boxed{2\cdot 3^{-\frac{1}{4}}}^{\text{ケ}}.$$

Ⅱ

[1]　$f(x)=e^x-x-20$ について，

$f'(x)=e^x-1$.

$f(x)$ の増減は以下のようになり，

$x=\boxed{0}_{ア}$ のとき最小値 $f(0)=\boxed{-19}_{イ}$.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	最小	↗

ここで,

$f(-20)=e^{-20}>0$,

$f(-19)=e^{-19}-1=e^{-19}-e^0<0$.

また，$e>2$ に注意すると，

$f(5)=e^5-25=2^5-25=7>0$.

ゆえに方程式 $f(x)=0$ の実数解の個数は $\boxed{2}_{ウ}$ 個.

$f(x)=0$ を満たす x で最大のものを p，最小のものを r とすると，

$f(x)<0 \Leftrightarrow r<x<p$.　……①

これまでの議論から，$0<p<5$ および

$-20<r<-19$.　……②

ゆえに $f(x)<0$ を満たす整数 x の中で最小のものは $\boxed{-19}_{エ}$ である.

[2]　$2.718<e<2.719$ であるので,

$\dfrac{27.18}{10}<e<\dfrac{27.19}{10}$,

$\dfrac{10.872}{4}<e<\dfrac{10.876}{4}$.

$\dfrac{n}{10}<e<\dfrac{n+1}{10}$ を満たす自然数 n は, $n=\boxed{27}_{オ}$,

$\dfrac{n}{4}<e<\dfrac{n+1}{4}$ を満たす自然数 n は，$n=\boxed{10}_{カ}$.

[3]　$g(x)=a^x-x-20$ について，

$g'(x)=\log a\cdot a^x-1$.

$a>1$ であることに注意. このとき $\log a>0$.

方程式 $g'(x)=0$ を解くと，

$\log a\cdot a^x=1$.

$\log(\log a)+x\log a=0$.

$x=-\dfrac{\log(\log a)}{\log a}$.

$b=-\dfrac{\log(\log a)}{\log a}$ とすると，$g(x)$ の増減は以下のようになり，

$x=b=\boxed{-\dfrac{\log(\log a)}{\log a}}_{キ}$

のとき最小値をとる.

x	$\cdots$	b	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	最小	↗

$g(x)=0$ を満たす x で最大のものを q とするとき，$q<p$ が成り立つ必要十分条件は，$g(0)=-19<0$ に注意して，

$g(p)>0$　ゆえに　$a^p>p+20$.

$f(p)=0$ であるから，

$e^p-p-20=0$.

$e^p=p+20$.

ゆえに $a^p>e^p$ となり，$\boxed{a>e}_{ク}$.

[4]　[2] より $\dfrac{5}{2}<e<\dfrac{11}{4}$ となるから，

$f(4)=e^4-24$

$>\left(\dfrac{5}{2}\right)^4-24$

$=\dfrac{625-384}{16}$

>0,

$f(3)=e^3-23$

$<\left(\dfrac{11}{4}\right)^3-23$

$=\dfrac{1331-1472}{64}$

<0.

$f(x)$ の増減と合わせて，

$3<p<4$.　……⑤

①および②,⑤より，$f(x)<0$ を満たす整数は

$-19, -18, \cdots, -1, 0, 1, 2, 3$

であり，$\boxed{23}_{ケ}$ 個存在する.

Ⅲ

$$a_n+\sqrt{5}\,b_n=(2+\sqrt{5})^n. \qquad \cdots\cdots①$$

[1]　$2+\sqrt{5}=a_1+\sqrt{5}\,b_1$

および a_1, b_1 は有理数であるので,

$$a_1=\boxed{2}_{ア},\ b_1=\boxed{1}_{イ}.$$

また,

$$\begin{aligned}&a_{n+1}+\sqrt{5}\,b_{n+1}\\&=(2+\sqrt{5})^{n+1}\\&=(2+\sqrt{5})^n\cdot(2+\sqrt{5})\\&=(a_n+\sqrt{5}\,b_n)(2+\sqrt{5})\\&=(2a_n+5b_n)+\sqrt{5}\,(a_n+2b_n).\end{aligned}$$

a_{n+1}, b_{n+1} および $2a_n+5b_n$, a_n+2b_n は有理数であるので,

$$a_{n+1}=\boxed{2}_{ウ}a_n+\boxed{5}_{エ}b_n,$$

$$b_{n+1}=a_n+\boxed{2}_{オ}b_n.$$

[2]　$c_n=(2+\sqrt{5})^n$ であるので,

$$\begin{aligned}c_{n+1}&=(2+\sqrt{5})^{n+1}\\&=(2+\sqrt{5})\cdot(2+\sqrt{5})^n\\&=(\boxed{2+\sqrt{5}}_{カ})c_n.\end{aligned}$$

[1] より,

$$\begin{aligned}d_{n+1}&=a_{n+1}-\sqrt{5}\,b_{n+1}\\&=(2a_n+5b_n)-\sqrt{5}\,(a_n+2b_n)\\&=(2-\sqrt{5})a_n-\sqrt{5}\,(2-\sqrt{5})b_n\\&=(2-\sqrt{5})(a_n-\sqrt{5}\,b_n)\\&=(\boxed{2-\sqrt{5}}_{キ})d_n.\end{aligned}$$

ゆえに $e_n=c_nd_n$ について,

$$\begin{aligned}e_1&=c_1d_1\\&=(a_1+\sqrt{5}\,b_1)(a_1-\sqrt{5}\,b_1)\\&=a_1{}^2-5b_1{}^2\\&=2^2-5\cdot1^2\\&=-1\end{aligned}$$

および,

$$\begin{aligned}e_{n+1}&=c_{n+1}d_{n+1}\\&=(2+\sqrt{5})c_n\cdot(2-\sqrt{5})d_n\\&=(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})\cdot c_nd_n\\&=-e_n.\end{aligned}$$

ゆえに数列 $\{e_n\}$ は初項 -1, 公比 -1 の等比数列であるので,

$$e_n=(-1)\cdot(-1)^{n-1}=(-1)^n.$$

$$c_nd_n=\boxed{(-1)^n}_{ク}.$$

したがって,

$$(2+\sqrt{5})^n\cdot d_n=(-1)^n.$$

$$d_n=\left(\frac{-1}{2+\sqrt{5}}\right)^n=(2-\sqrt{5})^n.$$

ゆえに,

$$a_n-\sqrt{5}\,b_n=(2-\sqrt{5})^n. \qquad \cdots\cdots②$$

(①＋②)÷2 より,

$$a_n=\frac{(2+\sqrt{5})^n+(2-\sqrt{5})^n}{2}.$$

(①－②)÷$2\sqrt{5}$ より,

$$b_n=\frac{(\boxed{2+\sqrt{5}}_{ケ})^n-(\boxed{2-\sqrt{5}}_{コ})^n}{2\sqrt{5}}.$$

[3]　②より,

$$\begin{aligned}s_n&=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sqrt{5}\sum_{k=1}^{n}b_k\\&=\sum_{k=1}^{n}(a_k-\sqrt{5}\,b_k)\\&=\sum_{k=1}^{n}(2-\sqrt{5})^k.\end{aligned}$$

$\lim_{n\to\infty}s_n$ は初項 $2-\sqrt{5}$, 公比 $2-\sqrt{5}$ の無限等比級数である. $2<\sqrt{5}<3$ より, $-1<2-\sqrt{5}<0$. ゆえに $\lim_{n\to\infty}s_n$ は収束し,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}s_n&=\frac{2-\sqrt{5}}{1-(2-\sqrt{5})}\\&=\boxed{-\frac{3}{4}}_{サ}+\boxed{\frac{1}{4}}_{シ}\sqrt{5}.\end{aligned}$$

IV

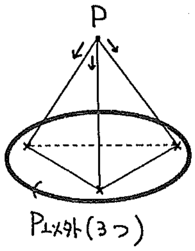
[1]

ある1つの頂点と隣接する頂点は $\boxed{3}^{ア}$ 個あり，
動点はこれらの頂点に確率 $\frac{1}{3}$ で移動する．
3回移動した後に出発した頂点にあるのは，
出発した頂点をPとするとき，

1回目はP以外の頂点に移動し（確率は1），
2回目もP以外の頂点に移動し（確率は $\frac{2}{3}$），
3回目はPに移動する（確率は $\frac{1}{3}$），

場合であるから，その確率は，

$$1\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\boxed{\frac{2}{9}}^{イ}.$$



1回の移動において，
PからPに移動する確率は0，
P以外の頂点からPに移動する確率は $\frac{1}{3}$ であるから，

動点がn回移動した後にPにある事象を A_n とするとき，

$$P_{A_{n-1}}(A_n)=\boxed{0}^{ウ},\quad P_{\overline{A_{n-1}}}(A_n)=\boxed{\frac{1}{3}}^{エ}.\ (n\geqq1)$$

$n\geqq1$ のとき動点がn回移動した後にPにあるのは，

n−1回目にP以外の頂点にあり，n回目に確率 $\frac{1}{3}$ でPに移動する

場合であるから，$P(\overline{A_{n-1}})=1-P(A_{n-1})$ に注意して，

$$\begin{aligned}P(A_n)&=P(\overline{A_{n-1}})\cdot P_{\overline{A_{n-1}}}(A_n)\\&=\frac{1}{3}P(\overline{A_{n-1}})\\&=\frac{1}{3}(1-P(A_{n-1})).\ (n\geqq1)\end{aligned}$$

これより，

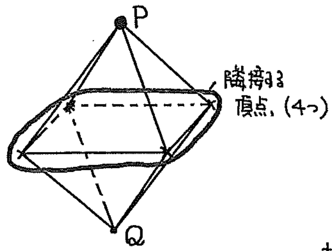
$$P(A_n)-\frac{1}{4}=-\frac{1}{3}\left(P(A_{n-1})-\frac{1}{4}\right).\ (n\geqq1)$$

$$\begin{aligned}P(A_n)-\frac{1}{4}&=\left(-\frac{1}{3}\right)^n\left(P(A_0)-\frac{1}{4}\right)\\&=\left(-\frac{1}{3}\right)^n\cdot\frac{3}{4}\ (P(A_0)=1\text{より})\ (n\geqq0)\end{aligned}$$

よって，

$$P(A_n)=\boxed{\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^n+\frac{1}{4}}^{オ}.$$

[2]



ある1つの頂点と隣接する頂点は $\boxed{4}^{カ}$ 個あり，
動点はこれらの頂点に確率 $\frac{1}{4}$ で移動する．
動点が出発した頂点をP，Pと隣接しない頂点をQとする．1回の移動において，
Pと隣接する頂点から「PまたはQ」に移動する確率は $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$，
「PまたはQ」から「PまたはQ」に移動する確率は0
であるから，

$$P_{B_{n-1}}(\overline{B_n})=\boxed{\frac{1}{2}}^{キ},\quad P_{\overline{B_{n-1}}}(\overline{B_n})=0.\ (n\geqq1)$$

$n\geqq1$ のとき，動点がn回移動した後に「PまたはQ」にあるのは，

n−1回目にPと隣接する頂点にあり，n回目に確率 $\frac{1}{2}$ で「PまたはQ」に移動する

場合であるから，

$$\begin{aligned}P(\overline{B_n})&=P(B_{n-1})\cdot P_{B_{n-1}}(\overline{B_n})\\&=\frac{1}{2}P(B_{n-1})\\&=\frac{1}{2}(1-P(\overline{B_{n-1}}))\ (P(B_{n-1})=1-P(\overline{B_{n-1}})\text{より})\ (n\geqq1)\end{aligned}$$

これより，

$$P(\overline{B_n})-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(P(\overline{B_{n-1}})-\frac{1}{3}\right).\ (n\geqq1)$$

$$\begin{aligned}P(\overline{B_n})-\frac{1}{3}&=\left(-\frac{1}{2}\right)^n\left(P(\overline{B_0})-\frac{1}{3}\right)\\&=\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^n.\ (P(\overline{B_0})=1-P(B_0)=1-0=1\text{より}.)\ (n\geqq0)\end{aligned}$$

$$P(\overline{B_n})=\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{3}.\ (n\geqq0)$$

したがって，

$$\begin{aligned}P(B_n)&=1-P(\overline{B_n})\\&=\frac{2}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}\ (n\geqq0).\end{aligned}$$

Pと隣接する頂点からPに移動する確率は $\frac{1}{4}$
であるから，n回移動した後にPにある確率は，
$n\geqq1$ のとき，

$$P(B_{n-1})\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{6}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}.$$

以上より，求める確率は，

$$\boxed{\begin{cases}1 & (n=0\text{のとき})\\ \frac{1}{6}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\} & (n\geqq1\text{のとき})\end{cases}}^{ク}.$$