理学部、医学部、工学部、農学部、情報学部（自然情報学科、コンピュータ科学学科）

1

(1) $g(x) = cx - f(x)$ より，

$g'(x) = c - f'(x)$，$g''(x) = -f''(x) < 0$

また，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} g'(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(c - f'(x)\right)$

$= c - a > 0 \quad (a < c < b$ より$)$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} g'(x) = \lim_{x\to\infty}\left(c - f'(x)\right)$

$= c - b < 0 \quad (a < c < b$ より$)$

以上を表にまとめると次のようになる。

x	$(-\infty)$	$\cdots$	(∞)
$g''(x)$		$-$	
$g'(x)$	$(c-a)$	$\searrow$	$(c-b)$

開区間$(-\infty, \infty)$において，関数$g'(x)$は連続であるから，表より，$g'(x)=0$となる実数xがただ1つ存在する。この値をkとおくと，関数$g(x)$の増減は次のようになる。

x	$\cdots$	k	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

したがって，$a < c < b$ をみたす任意の実数cに対し，関数$g(x)$の値を最大にする$x = x_0$はただ1つ存在する。$(x_0 = k)$

（証明終り）

(2)

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} \times \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)'$$

$$= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$f''(x) = \frac{(e^x - e^{-x})'(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})'}{(e^x + e^{-x})^2}$$

$$= \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2}$$

$$= \frac{(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})}{(e^x + e^{-x})^2}$$

$$= \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} > 0$$

よって，すべての実数xに対し，$f''(x) > 0$

（証明終り）

また，$\displaystyle a = \lim_{x\to-\infty} f'(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = -1$ …（答）

$\displaystyle b = \lim_{x\to\infty} f'(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1$ …（答）

(3) 小問(2)より，$-1 < c < 1$

$g'(x_0) = 0$ より，$c - f'(x_0) = 0$

$$c = \frac{e^{x_0} - e^{-x_0}}{e^{x_0} + e^{-x_0}} = \frac{e^{2x_0} - 1}{e^{2x_0} + 1}$$

$c(e^{2x_0} + 1) = e^{2x_0} - 1$

$(1 - c)e^{2x_0} = 1 + c$

$-1 < c < 1$ より $1 - c > 0$，$1 + c > 0$ であるから，

$e^{2x_0} = \dfrac{1+c}{1-c}$ …①より，$2x_0 = \log\left(\dfrac{1+c}{1-c}\right)$

よって，$x_0 = \dfrac{1}{2}\log\left(\dfrac{1+c}{1-c}\right)$ …（答）

また，①より，$e^{x_0} = \sqrt{\dfrac{1+c}{1-c}}$ であるから，

$$\frac{e^{x_0} + e^{-x_0}}{2} = \frac{1}{2e^{x_0}}\left(e^{2x_0} + 1\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-c}{1+c}} \times \left(\frac{1+c}{1-c} + \frac{1-c}{1-c}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-c}{1+c}} \times \frac{2}{1-c} = \frac{1}{\sqrt{(1-c)(1+c)}}$$

よって，

$$g(x_0) = cx_0 - f(x_0) = \frac{c}{2}\log\left(\frac{1+c}{1-c}\right) - \log\frac{1}{\sqrt{(1-c)(1+c)}}$$

$$= \frac{1}{2}(1+c)\log(1+c) + \frac{1}{2}(1-c)\log(1-c)$$ …（答）

理学部、医学部、工学部、農学部、情報学部（自然情報学科、コンピュータ科学科）

2

(*) $a \geqq b \geqq 0$ かつ $a^2-b^2=c$ より,

$$\begin{cases} a+b \geqq a-b \geqq 0, & \cdots ① \\ (a+b)(a-b)=c. & \cdots ② \end{cases}$$

さらに,

$a+b$ と $a-b$ は偶奇が一致. …③

(1) $c=24$ のとき, ②は

$(a+b)(a-b)=2^3\cdot 3$

であり, かつ ①, ③ より,

$(a+b,\ a-b)=(2^2\cdot 3,\ 2^1),\ (2^1\cdot 3,\ 2^2)$.

よって,

$(a,\ b)=(7,\ 5),\ (5,\ 1)$. …(答)

$c=25$ のとき, ②は

$(a+b)(a-b)=5^2$

であり, かつ ①, ③ より,

$(a+b,\ a-b)=(5^2,\ 1),\ (5,\ 5)$.

よって,

$(a,\ b)=(13,\ 12),\ (5,\ 0)$. …(答)

$c=26$ のとき, ②は

$(a+b)(a-b)=2\cdot 13$

であり, かつ ①, ③ をみたす組

$(a+b,\ a-b)$ は存在しない.

よって,

組 $(a,\ b)$ は存在しない. …(答)

(2) $c=4p^{2n}$ のとき, ②は

$(a+b)(a-b)=2^2\cdot p^{2n}$

であり, p が3以上の素数であること, かつ ①, ③ より,

$(a+b,\ a-b)=(2p^{2n-k},\ 2p^k)$.

（k は0以上 n 以下の整数）

よって,

$(a,\ b)=(p^{2n-k}+p^k,\ p^{2n-k}-p^k)$.

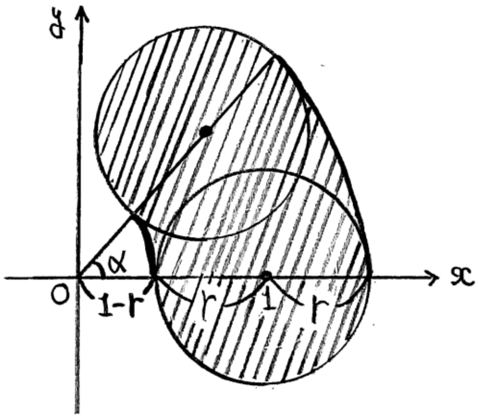
（k は0以上 n 以下の整数）

…(答)

理学部、医学部、工学部、農学部、情報学部（自然情報学科、コンピュータ科学科）

3

(1)



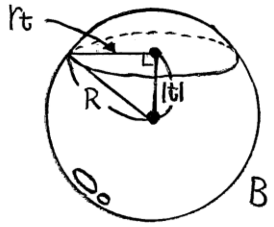
C が通過する領域は，図の斜線部分であるから，その面積は，

$\frac{1}{2}(1+r)^2\alpha - \frac{1}{2}(1-r)^2\alpha + \frac{1}{2}\pi r^2 \cdot 2$

$= 2\alpha r + \pi r^2$. …(答)

(2)　B の平面 $z=t$ $(-R<t<R)$ による切り口は円であり，その半径を r_t とおくと，

$r_t = \sqrt{R^2-t^2}$.



B が通過する領域の平面 $z=t$ $(-R<t<R)$ による切り口の面積は，(1) の結果の r を r_t におきかえて，

$2\alpha r_t + \pi r_t^2$

$= 2\alpha\sqrt{R^2-t^2} + \pi(R^2-t^2)$.

($t=\pm R$ のときも成り立つ)

よって，対称性に注意すると，求める体積は，

$2\int_0^R \left\{2\alpha\sqrt{R^2-t^2} + \pi(R^2-t^2)\right\}dt$

$= 4\alpha\int_0^R \sqrt{R^2-t^2}\,dt + 2\pi\int_0^R (R^2-t^2)\,dt$

$= 4\alpha \cdot \frac{1}{4}\pi R^2 + 2\pi\left[R^2t - \frac{1}{3}t^3\right]_0^R$

$= \alpha\pi R^2 + \frac{4}{3}\pi R^3$. …(答)

理学部、医学部、工学部、農学部、情報学部（自然情報学科、コンピュータ科学学科）

4

(1) 2回目の操作終了時点ですべてのコインが裏向きであるのは，2回の操作で②，⑤のコインを1回ずつ選ぶときであるから，

$$P_2 = {}_2C_1 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{18}. \quad \cdots(答)$$

(2)

選ぶコイン	裏返すコイン
①	②，④
②	①，③，⑤
③	②，⑥
④	①，⑤
⑤	②，④，⑥
⑥	③，⑤

選ぶコインと，裏返すコインは上の表のようになる．ⓚのコインを選ぶ回数を a_k $(k=1, 2, 3, 4, 5, 6)$ とする．

n 回目の操作終了時点で①，…，⑥のすべてのコインが裏向きであるための条件は，①，…，⑥のすべてのコインを奇数回裏返すことである．

よって，

$$\begin{cases} a_2 + a_4 = (奇数) & \cdots(*1) \\ a_1 + a_3 + a_5 = (奇数) & \cdots(*2) \\ a_2 + a_6 = (奇数) & \cdots(*3) \\ a_1 + a_5 = (奇数) & \cdots(*4) \\ a_2 + a_4 + a_6 = (奇数) & \cdots(*5) \\ a_3 + a_5 = (奇数) & \cdots(*6) \end{cases}$$

$(*1)$，$(*5)$ より　a_6 は偶数．$\cdots(*7)$

$(*7)$ と $(*3)$ より　a_2 は奇数．$\cdots(*8)$

$(*8)$ と $(*1)$ より　a_4 は偶数．

$(*2)$，$(*4)$ より　a_3 は偶数．$\cdots(*9)$

$(*9)$ と $(*6)$ より　a_5 は奇数．$\cdots(*10)$

$(*10)$ と $(*4)$ より　a_1 は偶数．

よって，

$$A = \{②, ⑤\},\ B = \{①, ③, ④, ⑥\}. \quad \cdots(答)$$

(3) 4回目の操作終了時点ですべてのコインが裏向きであるのは，(2)を考慮すると，4回の操作で

(ア) ②を3回，⑤を1回選ぶ

(イ) ②を1回，⑤を3回選ぶ

(ウ) ②を1回，⑤を1回，Ⓝを2回選ぶ

（ただし N は1, 3, 4, 6のいずれか1つを表す）

のいずれかとなるとき．

(ア)の確率は ${}_4C_3\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{4}{6^4}$．

(イ)の確率は ${}_4C_1\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{4}{6^4}$．

(ウ)の確率は

$${}_4C_1 \times \frac{4!}{2!}\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{48}{6^4}.$$

よって，

$$P_4 = \frac{4}{6^4} + \frac{4}{6^4} + \frac{48}{6^4} = \frac{7}{162}. \quad \cdots(答)$$