11

数学 数学Ⅰ，数学A 数学Ⅱ，数学B 数学C

令和７年度入学試験問題

受験番号

受験番号

解答紙

（４枚のうち１枚目）

11

解答はこの線より上の部分に書いてはいけません。

〔１〕 (50点)

〔１〕の採点

$$C_1 : y = x^3 + x^2 - x - 1,\ C_2 : y = x^2$$

とする．

$y = x^3 + x^2 - x - 1$

$$y' = 3x^2 + 2x - 1$$

であるから，点$(t,\ t^3 + t^2 - t - 1)$におけるC_1の接線の方程式は

$$y = (3t^2 + 2t - 1)(x - t) + t^3 + t^2 - t - 1$$

すなわち，$y = (3t^2 + 2t - 1)x - 2t^3 - t^2 - 1$

これがC_2に接するとき，

$$x^2 = (3t^2 + 2t - 1)x - 2t^3 - t^2 - 1$$

すなわち，$x^2 - (3t^2 + 2t - 1)x + 2t^3 + t^2 + 1 = 0$

の判別式をDとすると，

$$D = (3t^2 + 2t - 1)^2 - 4(2t^3 + t^2 + 1) = 0$$

これより，$9t^4 + 4t^3 - 6t^2 - 4t - 3 = 0$

$$(t - 1)(9t^3 + 13t^2 + 7t + 3) = 0$$

$$(t - 1)(t + 1)(9t^2 + 4t + 3) = 0$$

$$t = -1,\ 1$$

したがって，求める接線の方程式は

$$y = 0,\ y = 4x - 4 \ \cdots（答）$$

解答紙

（４枚のうち２枚目）

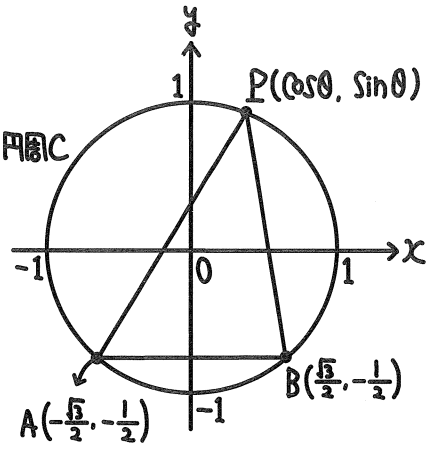
解答はこの線より上の部分に書いてはいけません。

〔２〕（50点）

〔２〕の採点

$A\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $P(\cos\theta, \sin\theta)$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$

として考えても一般性は失なわれない．



このとき，

$$AP^2 = \left(\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\sin\theta + \frac{1}{2}\right)^2$$
$$= \sqrt{3}\cos\theta + \sin\theta + 2$$
$$BP^2 = \left(\cos\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\sin\theta + \frac{1}{2}\right)^2$$
$$= -\sqrt{3}\cos\theta + \sin\theta + 2$$

であるから，

$$AP^2 + BP^2 = 2\sin\theta + 4 \leqq 6$$

等号が成り立つのは，

$$\sin\theta = 1 \ (0 \leqq \theta < 2\pi) \quad \text{すなわち} \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

のときであり，$P(0, 1)$ にあるときである．

よって，

$$(AP^2 + BP^2 \text{の最大値}) = 6 \quad \cdots \text{（答）}$$

解答紙

（４枚のうち３枚目）

解答はこの線より上の部分に書いてはいけません。

〔３〕 （50点）

〔３〕の採点

(1) kを整数とする. nを4で割った余りで分類する.

(ア) $n=4k$ のとき

$n^2=16k^2=8\times 2k^2+0$ より n^2を8で割った余りは 0

(イ) $n=4k+1$ のとき

$n^2=16k^2+8k+1=8(2k^2+k)+1$ より n^2を8で割った余りは 1

(ウ) $n=4k+2$ のとき

$n^2=16k^2+16k+4=8(2k^2+2k)+4$ より n^2を8で割った余りは 4

(エ) $n=4k+3$ のとき

$n^2=16k^2+24k+9=8(2k^2+3k+1)+1$ より n^2を8で割った余りは 1

(ア), (イ), (ウ), (エ)より, n^2を8で割った余りは0, 1, 4のいずれかである. （証明終）

(2) $2^m=n^2+3$ …① とする.

$n\geqq 0$ より $n^2+3\geqq 3$ であるから, ①が成り立つとき, $2^m\geqq 3$ より $m\geqq 2$

(あ) $m=2$ のとき

①は, $4=n^2+3$ より $n^2=1$ となる.

$n\geqq 0$ より, $n=1$

(い) $m\geqq 3$ のとき

2^mは8で割り切れる.

一方, (1)で示したことを用いると, n^2+3 を8で割った余りは, 3, 4, 7 のいずれかであるから, ①をみたす0以上の整数の組(m, n)は存在しない.

(あ), (い) より,

$(m, n)=(2, 1)$ …(答)

解答はこの線より上の部分に書いてはいけません。

〔４〕（50点）

〔４〕の採点

(1) $f(x)=0$ をみたす異なる実数 x の個数が1個であると解釈して解く．

1個のさいころを3回投げたときの目の出方は 6^3 通りであり，

これらは同様に確からしい．$f(x)=0$ のとき，

$$x^2-ax+b=0 \quad \cdots ① \quad \text{または} \quad x=c$$

である．①の判別式をDとすると，$D=a^2-4b$ であり，a,b の組に対するDの値は次の表のようになる．

$a \backslash b$	1	2	3	4	5	6
1	−3	−7	−11	−15	−19	−23
2	0	−4	−8	−12	−16	−20
3	5	1	−3	−7	−11	−15
4	12	8	4	0	−4	−8
5	21	17	13	9	5	1
6	32	28	24	20	16	12

(i) $D>0$ のとき．

①が異なる2つの実数解をもつので不適．

(ii) $D=0$ のとき．

表より，a,b の組は $(a,b)=(2,1),(4,4)$．

$(a,b)=(2,1)$ のとき，①は $(x-1)^2=0$ となり，$x=1$ を重解にもつから，$c=1$ である．

$(a,b)=(4,4)$ のとき，①は $(x-2)^2=0$ となり，$x=2$ を重解にもつから，$c=2$ である．

よって，a,b,c の組は 2通り．

(iii) $D<0$ のとき．

①は虚数解をもち，$f(x)=0$ をみたす実数 x は $x=c$ の1個だけとなる．

表より，$D<0$ となるような a,b の組は17通りであり，この17通りそれぞれに対し，c の決め方は $1,2,3,\cdots,6$ の6通りである．よって，a,b,c の組は，

$$17\times6=102 \text{ (通り)}$$

以上(i)〜(iii)より，求める確率は，$\dfrac{102+2}{6^3}=\dfrac{13}{27}$． …(答)

(2) $f(x)=0$ をみたす異なる自然数 x の個数が3個であると解釈して解く．

①が異なる2つの自然数の解をもつためには，$D=(\text{自然数})^2$ の形になることが必要である．

このとき，(1)の表より，a,b の組は

$(a,b)=(3,2),(4,3),(5,4),(5,6),(6,5)$

の5組である．これらについて，①の解は次のようになる．

(a,b)	$(3,2)$	$(4,3)$	$(5,4)$	$(5,6)$	$(6,5)$
①の解	1, 2	1, 3	1, 4	2, 3	1, 5

これら5組の a,b に対し，c の決め方が，それぞれ①の解を除く4通りであるので，a,b,c の組は，

$$5\times4=20 \text{ (通り)}$$

よって，求める確率は，

$$\frac{20}{6^3}=\frac{5}{54} \quad \cdots \text{(答)}$$