15	数学	数学Ⅰ，数学A 数学Ⅱ，数学B 数学Ⅲ，数学C

令和７年度入学試験問題

解答紙

（５枚のうち１枚目）

受	験	番	号	

15

解答はこの線より上の部分に書いてはいけません。

〔１〕（50点）

〔１〕の採点

(1) 点Qがxy平面上にあることより

$$Q(x,\ y,\ 0)$$

とおけて，条件より

$$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{AB}=0 \text{ かつ } \overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{AC}=0$$

であり，

$$\overrightarrow{PQ}=(x-a,\ y-b,\ -t),\ \overrightarrow{AB}=(-2,-2,\ 12),\ \overrightarrow{AC}=(0,-2,\ 8)$$

であるから，

$$\begin{cases}\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{AB}=-2(x-a)-2(y-b)+12(-t)=0\\ \overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{AC}=-2(y-b)+8(-t)=0\end{cases}$$

これより， $x=a-2t,\ y=b-4t$

よって， $Q(a-2t,\ b-4t,\ 0)$ …（答）

(2) (1)より，

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{OQ}|^2&=(a-2t)^2+(b-4t)^2\\&=20t^2-4(a+2b)t+a^2+b^2\\&=20\left(t-\frac{a+2b}{10}\right)^2+\frac{1}{5}(2a-b)^2\end{aligned}$$

よって，tがすべての実数値をとって変化するときのOQの最小値は

$$\sqrt{\frac{1}{5}(2a-b)^2}=\frac{1}{\sqrt{5}}|2a-b|$$

したがって，求める$a,\ b$の条件は

$$\frac{1}{\sqrt{5}}|2a-b|\leqq 1 \text{ すなわち } -\sqrt{5}\leqq 2a-b\leqq\sqrt{5}$$ …（答）

数学 数学Ⅰ，数学A 数学Ⅱ，数学B 数学Ⅲ，数学C

令和７年度入学試験問題

解答紙

（５枚のうち２枚目）

受	験	番	号	

受	験	番	号	

16

解答はこの線より上の部分に書いてはいけません。

〔２〕　(50点)

〔２〕の採点

(1)　$y=\tan x$ より，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x=1+y^2 \quad \cdots(答)$$

(2)　$y=\tan x$ とおくと，

x	$0\to\frac{\pi}{4}$
y	$0\to 1$

，$\dfrac{dy}{dx}=1+y^2$

であるから，

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan^4 x-\tan^2 x-2}{\tan^2 x-4}\,dx$$

$$=\int_0^1\frac{y^4-y^2-2}{y^2-4}\cdot\frac{dx}{dy}\,dy$$

$$=\int_0^1\frac{y^4-y^2-2}{y^2-4}\cdot\frac{1}{1+y^2}\,dy$$

$$=\int_0^1\frac{(y^2-2)(y^2+1)}{y^2-4}\cdot\frac{1}{y^2+1}\,dy$$

$$=\int_0^1\frac{y^2-2}{y^2-4}\,dy$$

$$=\int_0^1\left(1+\frac{2}{y^2-4}\right)dy$$

$$=\int_0^1\left\{1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{y-2}-\frac{1}{y+2}\right)\right\}dy$$

$$=\left[y+\frac{1}{2}\left(\log|y-2|-\log|y+2|\right)\right]_0^1$$

$$=1-\frac{1}{2}\log 3 \quad \cdots(答)$$

〔３〕 (50点)

〔３〕の採点

(1) kを整数とする．nを4で割った余りで分類する．

(ア) $n=4k$ のとき

$n^2=16k^2=8\times2k^2+0$ より n^2を8で割った余りは0

(イ) $n=4k+1$ のとき

$n^2=16k^2+8k+1=8(2k^2+k)+1$ より n^2を8で割った余りは1

(ウ) $n=4k+2$ のとき

$n^2=16k^2+16k+4=8(2k^2+2k)+4$ より n^2を8で割った余りは4

(エ) $n=4k+3$ のとき

$n^2=16k^2+24k+9=8(2k^2+3k+1)+1$ より n^2を8で割った余りは1

(ア),(イ),(ウ),(エ)より，n^2を8で割った余りは0, 1, 4のいずれかである．　(証明終)

(2) $2^m=n^2+3$ …① とする．

$n\geqq0$ より $n^2+3\geqq3$ であるから，①が成り立つとき，$2^m\geqq3$ より $m\geqq2$

(あ) $m=2$ のとき

①は，$4=n^2+3$ より $n^2=1$ となる．

$n\geqq0$ より，$n=1$

(い) $m\geqq3$ のとき

2^mは8で割り切れる．

一方，(1)で示したことを用いると，n^2+3 を8で割った余りは，3, 4, 7 のいずれかであるから，①をみたす0以上の整数の組(m,n)は存在しない．

(あ),(い)より，

$(m,n)=(2,1)$ …(答)

18

数学 数学Ⅰ，数学A 数学Ⅱ，数学B 数学Ⅲ，数学C

令和７年度入学試験問題

解答紙

（５枚のうち４枚目）

受験番号

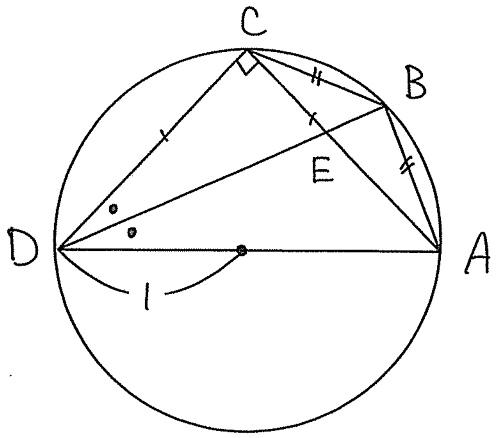
受験番号

18

解答はこの線より上の部分に書いてはいけません。

【４】 (50点)

〔４〕の採点



(1) 三角形ACDは∠ACD $=90^\circ$ の直角二等辺三角形であるから，∠ADC $=45^\circ$.
四角形ABCDは円に内接するから，∠ABC $=180^\circ-45^\circ=135^\circ$.
三角形ABCは AB = BC の二等辺三角形であるから，

$$\angle ACB=\frac{180^\circ-135^\circ}{2}=22.5^\circ. \cdots（答）$$

(2) $AD=2$ より $AC=\sqrt{2}$ であり，$\angle ABC=135^\circ$, $AB=BC$ であるから，三角形ABCに余弦定理を用いると，$(\sqrt{2})^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos 135^\circ$.

$$(2+\sqrt{2})BC^2=2.$$

$$BC^2=\frac{2}{2+\sqrt{2}}=2-\sqrt{2}.$$

よって，

$$BC=\sqrt{2-\sqrt{2}}. \cdots（答）$$

(3) $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}$ より，$\angle ADB=\angle BDC$．よって，直線DBは∠ADCの二等分線であるから，

$$CE:EA=DC:DA=\sqrt{2}:2=1:\sqrt{2}.$$

また，

$$(\text{三角形ABCの面積})=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot BC\sin 135^\circ=\frac{1}{2}(\sqrt{2-\sqrt{2}})^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}-1}{2}.$$

よって，

$$(\text{三角形BCEの面積})=\frac{1}{1+\sqrt{2}}(\text{三角形ABCの面積})$$

$$=\frac{3-2\sqrt{2}}{2}. \cdots（答）$$

解答紙

（５枚のうち５枚目）

解答はこの線より上の部分に書いてはいけません。

〔５〕（50点）

〔５〕の採点

(1) $f(x)=0$ をみたす異なる実数 x の個数が1個であると解釈して解く。

1個のさいころを3回投げたときの目の出方は 6^3 通りであり，

これらは同様に確からしい．$f(x)=0$ のとき，

$$x^2-ax+b=0 \quad \cdots ① \quad \text{または} \quad x=c$$

である．①の判別式をDとすると，$D=a^2-4b$ であり，a, b の組に対するDの値は次の表のようになる．

a＼b	1	2	3	4	5	6
1	−3	−7	−11	−15	−19	−23
2	0	−4	−8	−12	−16	−20
3	5	1	−3	−7	−11	−15
4	12	8	4	0	−4	−8
5	21	17	13	9	5	1
6	32	28	24	20	16	12

(i) $D>0$ のとき．

①が異なる2つの実数解をもつので不適．

(ii) $D=0$ のとき．

表より，a, b の組は $(a, b)=(2, 1), (4, 4)$．

$(a, b)=(2, 1)$ のとき，①は $(x-1)^2=0$ となり，$x=1$ を重解にもつから，$c=1$ である．

$(a, b)=(4, 4)$ のとき，①は $(x-2)^2=0$ となり，$x=2$ を重解にもつから，$c=2$ である．

よって，a, b, c の組は 2通り．

(iii) $D<0$ のとき．

①は虚数解をもち，$f(x)=0$ をみたす実数 x は $x=c$ の1個だけとなる．

表より，$D<0$ となるような a, b の組は17通りであり，この17通りそれぞれに対し，c の決め方は $1, 2, 3, \cdots, 6$ の6通りである．よって，a, b, c の組は，

$$17\times 6 = 102 \text{（通り）}$$

以上(i)〜(iii)より，求める確率は，$\dfrac{102+2}{6^3}=\dfrac{13}{27}$． …(答)

(2) $f(x)=0$ をみたす異なる自然数 x の個数が3個であると解釈して解く．

①が異なる2つの自然数の解をもつためには，$D=(\text{自然数})^2$ の形になることが必要である．

このとき，(1)の表より，a, b の組は

$$(a, b)=(3, 2), (4, 3), (5, 4), (5, 6), (6, 5)$$

の5組である．これらについて，①の解は次のようになる．

(a, b)	$(3, 2)$	$(4, 3)$	$(5, 4)$	$(5, 6)$	$(6, 5)$
①の解	1, 2	1, 3	1, 4	2, 3	1, 5

これら5組の a, b に対し，c の決め方が，それぞれ①の解を除く4通りであるので，a, b, c の組は，

$$5\times 4 = 20 \text{（通り）}$$

よって，求める確率は，

$$\frac{20}{6^3}=\frac{5}{54} \quad \cdots \text{(答)}$$