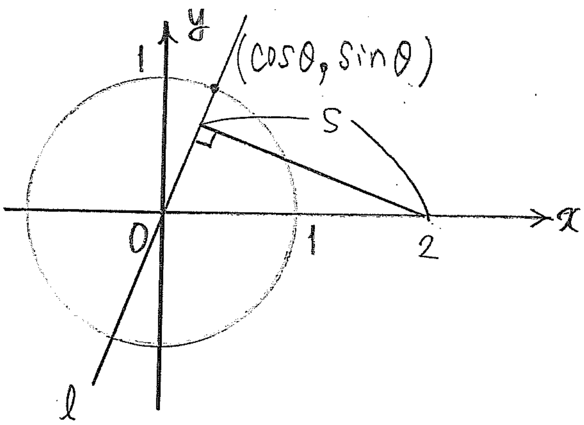
I



$\theta \neq \frac{\pi}{2}$ のとき l の方程式は

$$y = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}x$$

すなわち

$$(\sin\theta)x - (\cos\theta)y = 0$$

である。

（$\theta = \frac{\pi}{2}$ のときも正しい）

点 $(2, 0)$ と l の距離を s とおくと、

$$s^2 = \left(\frac{|2\sin\theta|}{\sqrt{\sin^2\theta + \cos^2\theta}}\right)^2$$

$$= \underline{4}\sin^2\theta.$$

…①

また、点 $(1, -3)$ と l の距離を t とおくと、

$$t^2 = \left(\frac{|\sin\theta + 3\cos\theta|}{\sqrt{\sin^2\theta + \cos^2\theta}}\right)^2$$

$$= \sin^2\theta + \underline{6}\sin\theta\cos\theta + \underline{9}\cos^2\theta.$$

…②　…③

よって、

$$s^2 + t^2$$

$$= 5\sin^2\theta + 6\sin\theta\cos\theta + 9\cos^2\theta$$

$$= 5\cdot\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta) + 6\cdot\frac{1}{2}\sin 2\theta + 9\cdot\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)$$

$$= \underline{3}\sin 2\theta + \underline{2}\cos 2\theta + \underline{7}$$

…④　…⑤　…⑥

$$= \sqrt{13}\sin(2\theta + \alpha) + 7.$$

（ただし、α は

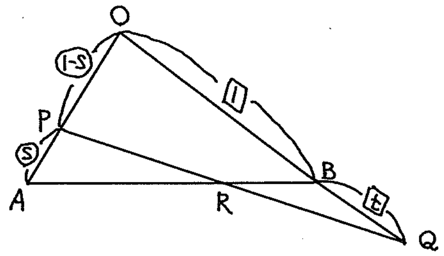
$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$, $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$

により定まる鋭角）

$0 \leqq \theta < \pi$ のとき、$\alpha \leqq 2\theta + \alpha < 2\pi + \alpha$ であるから、$s^2 + t^2$ は $2\theta + \alpha = \frac{3}{2}\pi$ のとき最小値 $\underline{7 - \sqrt{13}}$ をとる。

…⑦

Ⅱ



$\overrightarrow{OP}=\boxed{(1-s)}\,\vec{a}$,　$\overrightarrow{OQ}=\boxed{(1+t)}\,\vec{b}$.
①　②

三角形OPQと直線ABにおいて，
メネラウスの定理により

$$\frac{QB}{BO}\times\frac{OA}{AP}\times\frac{PR}{RQ}=1$$

が成り立つから

$$\frac{t}{1}\times\frac{1}{s}\times\frac{PR}{RQ}=1$$

$$\frac{PR}{RQ}=\frac{s}{t}$$

より

PR：RQ＝s：t

である．よって

$$\overrightarrow{OR}=\frac{t}{s+t}\overrightarrow{OP}+\frac{s}{s+t}\overrightarrow{OQ}$$

$$=\frac{\boxed{t(1-s)}}{s+t}\vec{a}+\frac{\boxed{s(1+t)}}{s+t}\vec{b}$$

③　④

…(ア)

となる．

AR：RB＝3：8のとき，(ア)より

$t(1-s):s(1+t)=8:3$

が成り立つ．すなわち

$3t(1-s)=8s(1+t)$

$11st+8s-3t=0$　…(イ)

が成り立つ．

sが2以上の整数の逆数のとき，

$s=\frac{1}{n}$　（nは2以上の整数）

と表せ，このとき(イ)は

$$\frac{11t}{n}+\frac{8}{n}-3t=0$$

$(3n-11)t=8$　…(ウ)

となる．

$3n-11$ は -5 以上の整数であり，
さらに $3n-11=3(n-4)+1$ より
3で割ったとき余りが1の整数である．
よって(ウ)を満たす整数の組
(n,t) $(t>0)$ は

$(3n-11,t)=(1,8),(4,2)$

より

$(n,t)=(4,8),(5,2)$

である．

したがって，AR：RB＝3：8となるs,t
のなかで，sが2以上の整数の逆数，
tが整数となる組(s,t)は

$$(s,t)=\boxed{\left(\tfrac{1}{4},8\right),\left(\tfrac{1}{5},2\right)}$$

⑤

である．

Ⅲ

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{100}\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}$

(ア)
$$=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{100}\left(\frac{1}{3k-2}-\frac{1}{3k+1}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{7}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{7}}-\cancel{\frac{1}{10}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{298}}-\frac{1}{301}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{301}\right)$$
$$=\underline{\frac{100}{301}}\ (答)$$

(2) (1)の(ア)と同様に計算すると

$$\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k(k+1)(k+2)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}\right\}$$
$$=\frac{1}{1\cdot2\cdot3}-\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$
$$=\underline{\frac{1}{6}-\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}}\ (答)$$

(3) (2)の結果より

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}$$
$$=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k(k+1)(k+2)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}\right\}$$
$$=\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{6}-\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right\}.$$

よって $S_n<\frac{1}{m}$ は

$$\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{6}-\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right\}<\frac{1}{m}$$
$$\frac{1}{6}-\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}<\frac{3}{m}\quad\cdots①$$

と表せる。

$\frac{1}{6}-\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$ は増加数列で，

$n\geqq3$ のとき

$$\frac{1}{6}-\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\geqq\frac{1}{6}-\frac{1}{4\cdot5\cdot6}$$
$$=\frac{19}{120}$$
$$=\frac{361}{120\times19}$$
$$>\frac{3}{19}\quad\left(=\frac{360}{120\times19}\right)$$

であるから，$m\geqq19$ とすると ①を満たさない自然数 n が存在する。また，

$\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}>0$ であるから，$\frac{3}{m}\geqq\frac{1}{6}$

のときすべての自然数 n に対して①は成り立つ。

よって，すべての自然数 n に対して $S_n<\frac{1}{m}$ が成り立つような m の条件は

$\frac{3}{m}\geqq\frac{1}{6}$ すなわち $m\leqq18$

である。

したがって，求める最大の自然数 m の値は

$m=\underline{18}$ (答)