I

(1)　$f(x)=x^2e^{-2x}$ より，

$$f'(x)=2xe^{-2x}+x^2(-2e^{-2x})=(-2x^2+2x)e^{-2x}$$
$$=-2x(x-1)e^{-2x}. \qquad \cdots(答)$$
$$f''(x)=(-4x+2)e^{-2x}+(-2x^2+2x)(-2e^{-2x})$$
$$=2(2x^2-4x+1)e^{-2x}. \qquad \cdots(答)$$

(2)　曲線 $y=f(x)$ の凹凸は次のようになる．

x	$\cdots$	$\frac{2-\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	$\frac{2+\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cup$	変曲点	$\cap$	変曲点	$\cup$

変曲点の x 座標は，

$$\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}. \qquad \cdots(答)$$

また，$f(x)$ の増減は次のようになる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e^2}$	$\searrow$

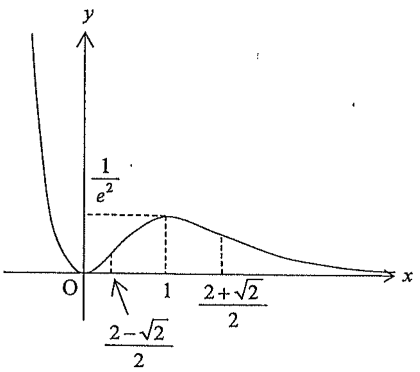
さらに，$x>0$ のとき $0<e^{-2x}<\frac{1}{x^3}$ より

$0<x^2e^{-2x}<\frac{1}{x}$ であり，$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ より，

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=0.$$

また，$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\infty.$

以上から，グラフの概形は図のようになる．



(3)　$0\leqq x\leqq a$ において $f(x)\geqq 0$ であるから，

$$S(a)=\int_0^a x^2e^{-2x}\,dx$$
$$=\left[x^2\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)\right]_0^a-\int_0^a 2x\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)dx$$
$$=-\frac{1}{2}a^2e^{-2a}+\int_0^a xe^{-2x}\,dx$$
$$=-\frac{1}{2}a^2e^{-2a}+\left[x\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)\right]_0^a-\int_0^a\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)dx$$
$$=-\frac{1}{2}a^2e^{-2a}-\frac{1}{2}ae^{-2a}-\left[\frac{1}{4}e^{-2x}\right]_0^a$$
$$=-\frac{1}{2}a^2e^{-2a}-\frac{1}{2}ae^{-2a}-\frac{1}{4}e^{-2a}+\frac{1}{4}.$$

ここで，(2)の過程より，$\lim_{a\to\infty}a^2e^{-2a}=0$ であり，$0<xe^{-2x}<\frac{1}{x^2}$ より同様にして，

$$\lim_{a\to\infty}ae^{-2a}=0.$$

さらに，$\lim_{a\to\infty}e^{-2a}=0$ であるから，

$$\lim_{a\to\infty}S(a)=\frac{1}{4}. \qquad \cdots(答)$$

Ⅱ

(1)　$n=3$，$x=1$ のとき，袋の中には，

赤玉 1 個，白玉 2 個

が入っている．

取り出した玉が 2 個とも白玉である確率は，

$$\frac{{}_2C_2}{{}_3C_2}=\boxed{\frac{1}{3}}_{①}.$$

この余事象の確率より，取り出した玉のうち，少なくとも 1 個は赤玉である確率は，

$$1-\frac{1}{3}=\boxed{\frac{2}{3}}_{②}.$$

(2)　$n=5$，$x=2$ のとき，袋の中には，

赤玉 2 個，白玉 3 個

が入っている．

取り出した玉が 2 個とも白玉である確率は，

$$\frac{{}_3C_2}{{}_5C_2}=\boxed{\frac{3}{10}}_{③}.$$

取り出した玉のうち，1 個だけが赤玉である確率は，

$$\frac{{}_2C_1\cdot{}_3C_1}{{}_5C_2}=\boxed{\frac{3}{5}}_{④}.$$

(3)　$n\geqq 4$，$1\leqq x\leqq n-1$ のとき，袋の中には，

赤玉 x 個，白玉 $(n-x)$ 個 $(1\leqq n-x\leqq n-1)$

が入っている．

$n-x\geqq 2$ のとき，取り出した玉が 2 個とも白玉である確率は，

$$\frac{{}_{n-x}C_2}{{}_nC_2}=\frac{\boxed{(n-x)(n-x-1)}_{⑤}}{n(n-1)}.$$

（これは $n-x=1$ のとき 0 より成り立つ．）

この余事象の確率より，取り出した玉のうち，少なくとも 1 個は赤玉である確率は，

$$1-\frac{(n-x)(n-x-1)}{n(n-1)}.$$

この確率が $\frac{1}{2}$ 以上となるとき，

$$1-\frac{(n-x)(n-x-1)}{n(n-1)}\geqq\frac{1}{2}$$

すなわち，

$$\frac{(n-x)(n-x-1)}{n(n-1)}\leqq\frac{1}{2}.$$

よって，取り出した玉のうち，少なくとも 1 個は赤玉である確率が $\frac{1}{2}$ 以上となるための条件は，

$$(n-x)(n-x-1)\leqq\boxed{\frac{n(n-1)}{2}}_{⑥}.$$

(4)　$n=22$ のとき，$1\leqq x\leqq 21$ であり，(3) の結果より，

$$(22-x)(21-x)\leqq 11\cdot 21$$

すなわち，

$$x^2-43x+231\leqq 0. \qquad \cdots(*)$$

よって，$1\leqq x\leqq 21$ において $(*)$ が成り立つような x の最小値を求めればよい．

$(*)$ の左辺を $f(x)$ とおくと，

$$f(x)=x(x-43)+231$$

より，

$f(1)=189>0$，
$f(2)=149>0$，
$f(3)=111>0$，
$f(4)=75>0$，
$f(5)=41>0$，
$f(6)=9>0$，
$f(7)=-21<0$

であるから，$(*)$ が成り立つような x の最小値は

7．

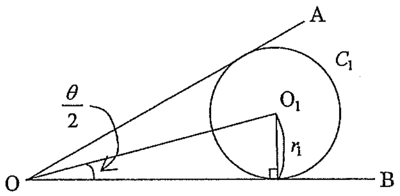
したがって，取り出した玉のうち，少なくとも 1 個は赤玉である確率が $\frac{1}{2}$ 以上であるときの x の最小値は，

$\boxed{7}_{⑦}$．

Ⅲ

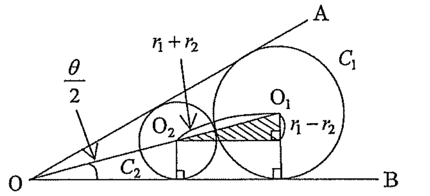
円 C_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ の中心を O_n，半径を r_n とする．

(1)



$\mathrm{OO}_1=1,\ \sin\dfrac{\theta}{2}=t$ より，

$$r_1=\mathrm{OO}_1\sin\frac{\theta}{2}=t. \quad \cdots(答)$$



また，上の図の斜線部分の直角三角形に着目して，

$$r_1-r_2=(r_1+r_2)\sin\frac{\theta}{2}.$$

$$t-r_2=(t+r_2)t.$$

$$(1+t)r_2=t-t^2.$$

$$r_2=\frac{(1-t)t}{1+t}. \quad \cdots(答)$$

(2)　r_n と r_{n+1} について，r_2 を求めるときと同様に考えて，

$$r_n-r_{n+1}=(r_n+r_{n+1})\sin\frac{\theta}{2}.$$

$$r_n-r_{n+1}=(r_n+r_{n+1})t.$$

$$(1+t)r_{n+1}=(1-t)r_n.$$

$$r_{n+1}=\frac{1-t}{1+t}r_n.$$

これより，数列 $\{r_n\}$ は初項 $r_1=t$，公比 $\dfrac{1-t}{1+t}$ の等比数列であるから，

$$r_n=t\left(\frac{1-t}{1+t}\right)^{n-1}. \quad \cdots(答)$$

(3)　$$S_n=\pi r_n{}^2=\pi t^2\left\{\left(\frac{1-t}{1+t}\right)^2\right\}^{n-1}.$$

これより，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}S_n$ は初項 πt^2，公比 $\left(\dfrac{1-t}{1+t}\right)^2$ の無限等比級数であるが，

$0<\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{\pi}{4}$ より $0<t<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ であり，このとき $0<\left(\dfrac{1-t}{1+t}\right)^2<1$ であるから，収束してその和は，

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\pi t^2}{1-\left(\dfrac{1-t}{1+t}\right)^2}$$

$$=\frac{\pi t^2(1+t)^2}{(1+t)^2-(1-t)^2}$$

$$=\frac{\pi t(t+1)^2}{4}. \quad \cdots(答)$$

(4)　$S(\theta)=\dfrac{\pi}{4}\sin\dfrac{\theta}{2}\left(\sin\dfrac{\theta}{2}+1\right)^2$ より，

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{S(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\pi}{8}\cdot\frac{\sin\dfrac{\theta}{2}}{\dfrac{\theta}{2}}\left(\sin\frac{\theta}{2}+1\right)^2$$

$$=\frac{\pi}{8}\cdot 1\cdot(0+1)^2$$

$$=\frac{\pi}{8}. \quad \cdots(答)$$

IV

(1)　方程式 $z^3=-8$ より，

$z^3+8=0$.

$(z+2)(z^2-2z+4)=0$.

$z=-2,\ 1\pm\sqrt{3}i$

であり，3解 z_1，z_2，z_3 について，

$z_1=-2,\ z_2=1+\sqrt{3}i,\ z_3=1-\sqrt{3}i$

としてもよい．

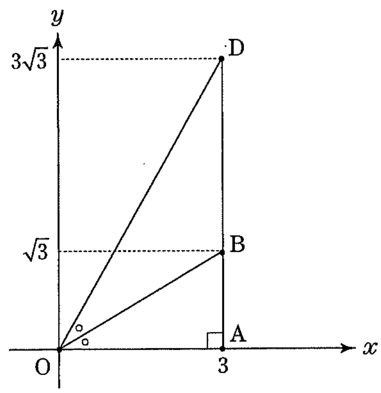
よって，

$$\begin{aligned}&|z_1-z_2|+|z_2-z_3|+|z_3-z_1|\\=&|-3-\sqrt{3}i|+|2\sqrt{3}i|+|3-\sqrt{3}i|\\=&\sqrt{(-3)^2+(-\sqrt{3})^2}+2\sqrt{3}|i|+\sqrt{3^2+(-\sqrt{3})^2}\\=&2\sqrt{3}+2\sqrt{3}+2\sqrt{3}\\=&\boxed{6\sqrt{3}}_{①}.\end{aligned}$$

(2)　$\angle AOB=\dfrac{\pi}{6}$，$OA=3$，$OB=2\sqrt{3}$ より，$\triangle OAB$ は $\angle OAB=\dfrac{\pi}{2}$ の直角三角形であるから，座標平面において，

$O(0,\ 0)$，$A(3,\ 0)$，$B(3,\ \sqrt{3})$

としてもよい．



線分 AB の延長線上に点 D を，OB が $\angle AOD$ の二等分線となるようにとると，

$$\angle AOD=2\angle AOB=\frac{\pi}{3}$$

であり，$\triangle OAD$ は $\angle OAD=\dfrac{\pi}{2}$ の直角三角形であるから，

$D(3,\ 3\sqrt{3})$.

よって，点 D は線分 AB を 3：2 に外分するから，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OD}&=\frac{-2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}}{3-2}\\&=\boxed{-2}_{②}\overrightarrow{OA}+\boxed{3}_{③}\overrightarrow{OB}.\end{aligned}$$

(3)　$x>0$ のとき，

$f(x)=x^{x^2}>0$

であるから，自然対数をとると，

$\log f(x)=\log x^{x^2}$

すなわち，

$\log f(x)=x^2\log x$.

この両辺を x で微分すると，

$$\begin{aligned}\frac{f'(x)}{f(x)}&=2x\cdot\log x+x^2\cdot\frac{1}{x}\\&=(2\log x+1)x\end{aligned}$$

すなわち，

$f'(x)=(2\log x+1)x\cdot f(x)$.

よって，

$f'(x)=(\boxed{2\log x+1}_{④})x^{x^2+1}$.

また，$x>0$ における $f(x)$ の増減は次のようになる．

x	(0)	$\cdots$	$e^{-\frac{1}{2}}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘		↗

したがって，$f(x)$ の最小値は，

$$f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)=\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^{e^{-1}}=e^{\boxed{-\frac{1}{2e}}_{⑤}}.$$

(4)　すべての実数 x に対して，

$g(x)=-g(-x)$

すなわち，

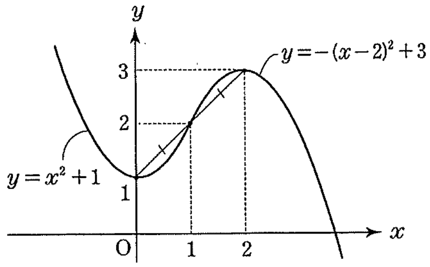
$g(-x)=-g(x)$

が成り立つのは，曲線 $y=g(x)$ が原点に関して対称となるときである．

一方，$f(x)=2x-(x-1)|x-1|$ とおくと，

$$\begin{aligned}f(x)&=\begin{cases}2x-(x-1)^2 & (x\geqq 1\text{のとき}),\\2x+(x-1)^2 & (x\leqq 1\text{のとき})\end{cases}\\&=\begin{cases}-x^2+4x-1 & (x\geqq 1\text{のとき}),\\x^2+1 & (x\leqq 1\text{のとき})\end{cases}\\&=\begin{cases}-(x-2)^2+3 & (x\geqq 1\text{のとき}),\\x^2+1 & (x\leqq 1\text{のとき})\end{cases}\end{aligned}$$

であるから，$y=f(x)$ のグラフは次のようになる．



IV

$y=f(x)$ のグラフは点 $(1,\ 2)$ に関して対称であるから，x 軸方向に -1，y 軸方向に -2 だけ平行移動すると原点に関して対称となる．このように平行移動して得られたグラフを曲線 $y=g(x)$ とすると，すべての実数 x に対して，

$$g(x)=-g(-x)$$

が成り立つ．

したがって，求める a，b の値は，

$$a=\boxed{-1}_{⑥},\quad b=\boxed{-2}_{⑦}.$$