1

(1)

$$f(x) = x^2 + 2ax + 2a^2 + 4a - 4$$
$$= (x+a)^2 + a^2 + 4a - 4$$

とする．また，$f(x)=0$ の判別式を D とする．

(i)

C が x 軸と異なる2点で交わることから，

$$D > 0.$$

$\dfrac{D}{4} = -a^2 - 4a + 4$ より，

$$-a^2 - 4a + 4 > 0.$$
$$a^2 + 4a - 4 < 0.$$

よって，a の取りうる値の範囲は，

$$\boxed{-2-2\sqrt{2} < a < -2+2\sqrt{2}}_{\text{ア}}.$$

次に，Cがすべての象限を通るような条件は，

$$f(0) < 0.$$

$f(0) = 2a^2 + 4a - 4$ より，

$$2a^2 + 4a - 4 < 0.$$
$$a^2 + 2a - 2 < 0.$$
$$-1-\sqrt{3} < a < -1+\sqrt{3}.$$

これを満たす最小の整数 a の値は$1 < \sqrt{3} < 2$ より，

$$a = \boxed{-2}_{\text{イ}}.$$

(ii)

2点A，Bの x 座標がともに1以上になる条件は，

$$\begin{cases} D > 0, \\ C\text{の軸}x = -a\text{について，} \ -a \geqq 1, \\ f(1) = 2a^2 + 6a - 3 \geqq 0 \end{cases}$$

であるから，

$$\begin{cases} -2-2\sqrt{2} < a < -2+2\sqrt{2}, \\ a \leqq -1, \\ a \leqq \dfrac{-3-\sqrt{15}}{2}, \ \dfrac{-3+\sqrt{15}}{2} \leqq a. \end{cases}$$

よって，求める a の取りうる値の範囲は，

$$\boxed{-2-2\sqrt{2} < a \leqq \frac{-3-\sqrt{15}}{2}}_{\text{ウ}}. \quad \cdots①$$

このとき，$f(x)=0$を解くと，

$$x = -a \pm \sqrt{-a^2 - 4a + 4}$$

であるから，

$$\text{AB} = \left(-a + \sqrt{-a^2-4a+4}\right) - \left(-a - \sqrt{-a^2-4a+4}\right)$$
$$= 2\sqrt{-a^2-4a+4}.$$

AB$= 4$より，

$$2\sqrt{-a^2-4a+4} = 4.$$
$$-a^2 - 4a + 4 = 4.$$
$$a^2 + 4a = 0.$$
$$a(a+4) = 0.$$
$$a = 0, \ -4.$$

よって，①より，求める a の値は，

$$a = \boxed{-4}_{\text{エ}}.$$

(2)

3個のさいころをすべて区別すると，目の出方は全部で，

$$6^3 = 216(\text{通り}).$$

(i)

$M=2$となるのは，すべての目が2以下の場合からすべての目が1の場合を除いた場合であるから，その確率は，

$$\frac{2^3-1}{216} = \boxed{\frac{7}{216}}_{\text{オ}}.$$

次に，$M=4$となるのは，すべての目が4以下の場合からすべての目が3以下の場合を除いた場合であるから，その確率は，

$$\frac{4^3-3^3}{216} = \boxed{\frac{37}{216}}_{\text{カ}}. \quad \cdots①$$

(ii)

$M=4$であり，かつ，少なくとも1個のさいころに1の目が出るときの3つの目の組み合わせは，

$\{1,\ 1,\ 4\}$，$\{1,\ 2,\ 4\}$，$\{1,\ 3,\ 4\}$，$\{1,\ 4,\ 4\}$

のいずれかであるから，このような目の出方は，

$$\frac{3!}{2!} + 3! + 3! + \frac{3!}{2!} = 18(\text{通り}).$$

したがって，$M=4$であり，かつ，少なくとも1個のさいころに1の目が出る確率は，

$$\frac{18}{216}.$$

これと①より，求める確率は，

$$\frac{\frac{18}{216}}{\frac{37}{216}} = \boxed{\frac{18}{37}}_{\text{キ}}.$$

2

(1)

(ⅰ)

$$x^2+y^2+2x-3=0$$

より，

$$(x+1)^2+y^2=4.$$

したがって，C の中心をE，半径を r とすると，

$$\mathrm{E}(-1,\ 0),\ r=2.$$

また，直線 l はA(3, 0) を通り，傾きが m であるから，その方程式は，

$$y=m(x-3).$$

E と l の距離を d とすると，C と l が接する条件は，

$$d=r.$$

$$\frac{|m\cdot(-1)-1\cdot 0-3m|}{\sqrt{m^2+1}}=2.$$

$$|4m|=2\sqrt{m^2+1}.$$

$$16m^2=4(m^2+1).$$

$$m^2=\frac{1}{3}.$$

よって，$m>0$ より，

$$m=\boxed{\frac{1}{\sqrt{3}}}_{ア}.$$

このとき，

$$l: y=\frac{1}{\sqrt{3}}(x-3).$$

これと，Cの方程式からyを消去して，

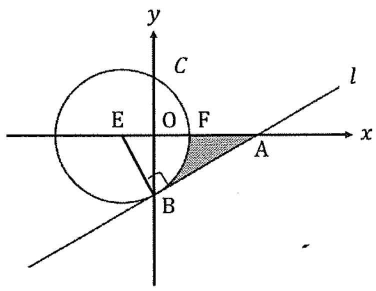
$$(x+1)^2+\frac{1}{3}(x-3)^2=4.$$

$$x=0. \qquad \cdots①$$

よって，①より，Cとlの接点Bの座標は，

$$\mathrm{B}\boxed{\left(0,\ -\sqrt{3}\right)}_{イ}.$$

(ⅱ)



領域Dは上の図の灰色部分で表される．ここで，

$$m=\frac{1}{\sqrt{3}}=\tan\frac{\pi}{6}$$

より，lがx軸の正方向となす角は，

$$\frac{\pi}{6}.$$

したがって，上の図より，

$$\angle\mathrm{AEB}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}.$$

よって，領域Dの面積Sは，F(1, 0) とすると，

$$S=\triangle\mathrm{AEB}-(\text{扇形EFBの面積})$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\sqrt{3}-\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{\pi}{3}$$

$$=\boxed{2\sqrt{3}-\frac{2\pi}{3}}_{ウ}.$$

3/4

2

(2)

(ⅰ)

等差数列 $\{a_n\}$ の初項を a，公差を d とすると，

$$a_2 = 37$$

より，

$$a + d = 37. \qquad \cdots①$$

また，

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{50} = -500$$

より，

$$\frac{50}{2}(2a + 49d) = -500. \qquad \cdots②$$

①，②より，

$$a = 39,\ d = -2.$$

よって，

$$a_n = 39 - 2(n-1) = \boxed{-2n + 41}_{\text{エ}}.$$

また，

$n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 20$のとき $a_n > 0$,

$n = 21,\ 22,\ 23,\ \cdots$のとき $a_n < 0$

であるから，

$$\begin{aligned}&|a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_{50}|\\ &= \sum_{k=1}^{20} a_k - \sum_{k=21}^{50} a_k\\ &= \frac{20}{2}(39 + 1) - \frac{30}{2}(-1 - 59)\\ &= \boxed{1300}_{\text{オ}}.\end{aligned}$$

(ⅱ)

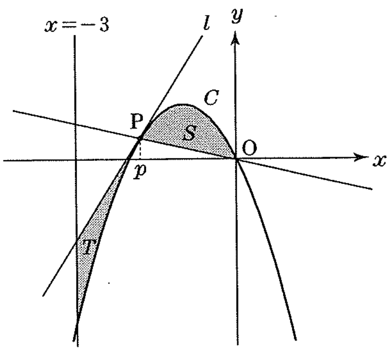
(ⅰ)の結果より，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_{2k} &= \sum_{k=1}^{n}(-4k + 41)\\ &= \frac{n}{2}\{37 + (-4n + 41)\}\\ &= \boxed{-n(2n - 39)}_{\text{カ}}.\end{aligned}$$

また，

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{25} a_{2k-1} - 2\sum_{k=1}^{25} a_{2k}\\ &= \sum_{k=1}^{25}(a_{2k-1} - 2a_{2k})\\ &= \sum_{k=1}^{25}\{-(a_{2k} - a_{2k-1}) - a_{2k}\}\\ &= \sum_{k=1}^{25}(2 - a_{2k})\\ &= 2 \cdot 25 + 25(2 \cdot 25 - 39)\\ &= \boxed{325}_{\text{キ}}.\end{aligned}$$

$\boxed{3}$



(1)　$p \neq 0$ より，直線 OP の方程式は，

$$y=\frac{-p^2-2p}{p}x$$

すなわち，

$$y=(-p-2)x. \quad \cdots \text{(答)}$$

また，$C: y=-x^2-2x$ より，

$$y'=-2x-2$$

であるから，C 上の P における接線 l の方程式は，

$$y-(-p^2-2p)=(-2p-2)(x-p)$$

すなわち，

$$y=(-2p-2)x+p^2. \quad \cdots \text{(答)}$$

(2)　図より，求める面積 S は，

$$\begin{aligned} S&=\int_p^0 \{(-x^2-2x)-(-p-2)x\}dx \\ &=-\int_p^0 x(x-p)dx \\ &=-\left(-\frac{1}{6}\right)(0-p)^3 \\ &=-\frac{1}{6}p^3. \quad \cdots \text{(答)} \end{aligned}$$

(3)　図より，面積 T は，

$$\begin{aligned} T&=\int_{-3}^p \{(-2p-2)x+p^2-(-x^2-2x)\}dx \\ &=\int_{-3}^p (x-p)^2dx \\ &=\left[\frac{1}{3}(x-p)^3\right]_{-3}^p \\ &=\frac{1}{3}\{0^3-(-3-p)^3\} \\ &=\frac{1}{3}p^3+3p^2+9p+9. \end{aligned}$$

これと (2) の結果より，

$$\begin{aligned} S+T&=-\frac{1}{6}p^3+\frac{1}{3}p^3+3p^2+9p+9 \\ &=\frac{1}{6}p^3+3p^2+9p+9. \end{aligned}$$

$f(p)=\dfrac{1}{6}p^3+3p^2+9p+9$ とおくと，

$$\begin{aligned} f'(p)&=\frac{1}{2}p^2+6p+9 \\ &=\frac{1}{2}(p^2+12p+18) \end{aligned}$$

であるから，$-3<p<0$ における $f(p)$ の増減は次のようになる．

p	(-3)	$\cdots$	$-6+3\sqrt{2}$	$\cdots$	(0)
$f'(p)$		$-$	0	$+$	
$f(p)$		$\searrow$		$\nearrow$	

よって，$f(p)=S+T$ が最小となる p の値は，

$$p=-6+3\sqrt{2}. \quad \cdots \text{(答)}$$