$\boxed{1}$

(1)

$$\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_{11}\mathrm{C}_2}=\underset{ア}{\boxed{\frac{3}{55}}}.$$

(2) $2^x=X$ とおくと，

$$\begin{aligned}&4^x+2^{x+1}-8-16\cdot 2^{-x}\\&=(2^x)^2+2\cdot 2^x-8-\frac{16}{2^x}\\&=\underset{イ}{\boxed{X^2+2X-8-\frac{16}{X}}}\\&=\frac{X^3+2X^2-8X-16}{X}\\&=\frac{(X+2)(X^2-8)}{X}.\end{aligned}$$

したがって，$4^x+2^{x+1}-8-16\cdot 2^{-x}=0$ のとき，

$$\frac{(X+2)(X^2-8)}{X}=0.$$

このとき，$X=2^x>0$ より，

$$X=\sqrt{8}=2^{\frac{3}{2}}$$

であるから，

$$x=\underset{ウ}{\boxed{\frac{3}{2}}}.$$

(3) $\dfrac{3x^2-2x+4}{(x+1)(x-1)^2}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{(x-1)^2}$ と

$$\begin{aligned}&\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}\\&=\frac{A(x-1)^2+B(x+1)(x-1)+C(x+1)}{(x+1)(x-1)^2}\\&=\frac{(A+B)x^2+(-2A+C)x+A-B+C}{(x+1)(x-1)^2}\end{aligned}$$

より，

$$\begin{cases}A+B=3,\\-2A+C=-2,\\A-B+C=4.\end{cases}$$

これより，

$$A=\underset{エ}{\boxed{\frac{9}{4}}},\ B=\underset{オ}{\boxed{\frac{3}{4}}},\ C=\underset{カ}{\boxed{\frac{5}{2}}}.$$

(4) $w=i(2z+3)$ より，

$$z=\frac{1}{2}\left(\frac{w}{i}-3\right).$$

これと $|z|=1$ より，

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2}\left(\frac{w}{i}-3\right)\right|&=1.\\\frac{|w-3i|}{|i|}&=2.\\|w-3i|&=2.\end{aligned}$$

したがって，点 w は点 $\underset{キ}{\boxed{3i}}$ を中心とする半径 $\underset{ク}{\boxed{2}}$ の円を描く．

2

(1)　第 m 群は

$$\frac{1}{m+1},\ \frac{2}{m+1},\ \cdots,\ \frac{m}{m+1}$$

の m 項からなり，第 m 群の最後の項は

$$1+2+\cdots+m=\frac{1}{2}m(m+1)$$

より，第 $\frac{1}{2}m(m+1)$ 項である．

$15=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 6$ より，第 15 項は第 5 群の最後の項である．ゆえに第 15 項は $\boxed{\frac{5}{6}}_{ア}$．

また，$\frac{7}{26}$ は第 25 群の 7 番目の項である．

$$\frac{1}{2}\cdot 24\cdot 25+7=300+7=307$$

であるので，$\frac{7}{26}$ は第 $\boxed{307}_{イ}$ 項である．

次に，第 6 群に属するすべての項

$$\frac{1}{7},\ \frac{2}{7},\ \frac{3}{7},\ \frac{4}{7},\ \frac{5}{7},\ \frac{6}{7}$$

の和 T_6 は，

$$T_6=\frac{1}{7}+\frac{2}{7}+\frac{3}{7}+\frac{4}{7}+\frac{5}{7}+\frac{6}{7}=\frac{21}{7}=\boxed{3}_{ウ}.$$

第 m 群に属するすべての項の和 T_m は，

$$\begin{aligned}T_m&=\frac{1}{m+1}+\frac{2}{m+1}+\cdots+\frac{m}{m+1}\\&=\frac{1}{m+1}(1+2+\cdots+m)\\&=\frac{1}{m+1}\cdot\frac{1}{2}m(m+1)\\&=\boxed{\frac{m}{2}}_{エ}.\end{aligned}$$

(2)　(1)より，初項から第 m 群の最後の項までのすべての項の和 S_m は，

$$\begin{aligned}S_m&=T_1+T_2+\cdots+T_m\\&=\frac{1}{2}+\frac{2}{2}+\cdots+\frac{m}{2}\\&=\frac{1}{2}(1+2+\cdots+m)\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}m(m+1)\\&=\boxed{\frac{1}{4}m(m+1)}_{オ}.\end{aligned}$$

(3)　数列の項はすべて正であることに注意．(2)より，

$$S_{89}=\frac{1}{4}\cdot 89\cdot 90=2002+\frac{1}{2}<2025,$$

$$S_{90}=\frac{1}{4}\cdot 90\cdot 91=2047+\frac{1}{2}>2025.$$

ゆえに初項から第 n 項までの数列の和が初めて 2025 をこえるのは，第 n 項が第 $\boxed{90}_{カ}$ 群に属するときである．

(4)　第 7 群は

$$\frac{1}{8},\ \frac{2}{8},\ \frac{3}{8},\ \frac{4}{8},\ \frac{5}{8},\ \frac{6}{8},\ \frac{7}{8}$$

からなり，値が $\frac{1}{2}=\frac{4}{8}$ 以下となる項の和 U_7 は，

$$\frac{1}{8}+\frac{2}{8}+\frac{3}{8}+\frac{4}{8}=\boxed{\frac{5}{4}}_{キ}.$$

以下，第 m 群のうち値が $\frac{1}{2}$ 以下の項の和 U_m について，$U_m<3$ となる自然数 m を m の偶奇により場合分けすることで求める．

(i)　m が奇数であるとき，

$$m=2l-1\quad(l：自然数)$$

とおけて，第 $2l-1$ 群

$$\frac{1}{2l},\ \frac{2}{2l},\ \cdots,\ \frac{2l-1}{2l}$$

のうち，値が $\frac{1}{2}=\frac{l}{2l}$ 以下となる項の和 U_{2l-1} は，

$$\begin{aligned}U_{2l-1}&=\frac{1}{2l}+\frac{2}{2l}+\cdots+\frac{l}{2l}\\&=\frac{1}{2l}(1+2+\cdots+l)\\&=\frac{1}{2l}\cdot\frac{1}{2}l(l+1)\\&=\frac{1}{4}(l+1).\end{aligned}$$

$U_{2l-1}<3$ を解くと，

$$\frac{1}{4}(l+1)<3\quad したがって\quad l<11.\quad\cdots\cdots①$$

①を満たす最大の自然数 l は 10 であるので，$U_m<3$ を満たす奇数 m の最大値は，

$$2\cdot 10-1=19.$$

(ii)　m が偶数であるとき，

$$m=2l\quad(l：自然数)$$

とおけて，第 $2l$ 群

2

$$\frac{1}{2l+1},\ \frac{2}{2l+1},\ \cdots,\ \frac{2l}{2l+1}$$

のうち，値が $\frac{1}{2}=\frac{l+\frac{1}{2}}{2l+1}$ 以下となる項の和 U_{2l} は，

$$\begin{aligned} U_{2l} &= \frac{1}{2l+1}+\frac{2}{2l+1}+\cdots+\frac{l}{2l+1} \\ &= \frac{1}{2l+1}(1+2+\cdots+l) \\ &= \frac{1}{2l+1}\cdot\frac{1}{2}l(l+1) \\ &= \frac{l(l+1)}{2(2l+1)}. \end{aligned}$$

$U_{2l}<3$ を解くと，

$$\frac{l(l+1)}{2(2l+1)}<3.$$

$$l(l+1)<6(2l+1).$$

$$l(l-11)<6. \qquad \cdots\cdots②$$

$l=11$ のとき，

$$l(l-11)=0\cdot 11<6.$$

したがって，不等式②は成り立つ．

また $l\geqq 12$ のとき，

$$l(l-11)\geqq 12\cdot 1>6$$

したがって，不等式②は成り立たない．

以上から，②を満たす最大の自然数 l は 11 であるので，$U_m<3$ を満たす偶数 m の最大値は，

$$2\cdot 11=22.$$

ゆえに $U_m<3$ となる自然数 m の最大値は，

$\boxed{22}_{ク}$．

$\boxed{3}$

(1)

$$f_2(x)=\frac{\sin 2x}{\sin x}=\frac{2\sin x\cos x}{\sin x}=\boxed{2}_{ア}\cos x,$$

$$f_3(x)=\frac{\sin 3x}{\sin x}=\frac{3\sin x-4\sin^3 x}{\sin x}$$

$$=3-4\sin^2 x=\boxed{4}_{イ}\cos^2 x-1,$$

$$f_4(x)=\frac{\sin 4x}{\sin x}=\frac{2\sin 2x\cos 2x}{\sin x}$$

$$=\frac{4\sin x\cos x\cos 2x}{\sin x}=4\cos x(2\cos^2 x-1)$$

$$=\boxed{8}_{ウ}\cos^3 x-4\cos x.$$

(2)

$$\int f_3(x)\,dx=\int(4\cos^2 x-1)\,dx$$

$$=\int\left\{4\cdot\frac{1}{2}(1+\cos 2x)-1\right\}dx$$

$$=\int(2\cos 2x+1)\,dx$$

$$=\boxed{\sin 2x+x}_{エ}+C.\ (C\text{ は積分定数})$$

また，$\dfrac{\pi}{6}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ において $f_3(x)=0$ のとき，

$$4\cos^2 x-1=0.$$

$$\cos x=\frac{1}{2}.$$

$\dfrac{\pi}{6}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ より，

$$x=\frac{\pi}{3}.$$

したがって，曲線 C_3 と x 軸との交点の座標は，

$$\left(\boxed{\frac{\pi}{3}}_{オ},\ 0\right).$$

ここで，$\dfrac{\pi}{6}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{3}$ において，$\dfrac{\pi}{2}\leqq 3x\leqq\pi$ より，

$$f_3(x)=\frac{\sin 3x}{\sin x}\geqq 0.$$

よって，曲線 C_3，x 軸および直線 $x=\dfrac{\pi}{6}$ で囲まれた部分の面積は，

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}f_3(x)\,dx=\Big[\sin 2x+x\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\boxed{\frac{\pi}{6}}_{カ}.$$

(3)

$$\int f_4(x)\,dx=\int(8\cos^3 x-4\cos x)\,dx$$

$$=\int\{8(1-\sin^2 x)\cos x-4\cos x\}\,dx$$

$$=\int(-8\sin^2 x\cos x+4\cos x)\,dx$$

$$=\boxed{-\frac{8}{3}\sin^3 x+4\sin x}_{キ}+C'.$$

（C' は積分定数）

また，$\dfrac{\pi}{6}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ において $f_4(x)=0$ のとき，

$$4\cos x(2\cos^2 x-1)=0.$$

$$\cos x=0,\ \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$\dfrac{\pi}{6}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ より，

$$x=\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2}.$$

したがって，曲線 C_4 と x 軸との交点の座標は，

$$\left(\frac{\pi}{4},\ 0\right),\ \left(\frac{\pi}{2},\ 0\right).$$

ここで，$\dfrac{\pi}{4}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ において，$\pi\leqq 4x\leqq 2\pi$ より，

$$f_4(x)=\frac{\sin 4x}{\sin x}\leqq 0.$$

よって，曲線 C_4 と x 軸で囲まれた部分の面積は，

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(-f_3(x))\,dx=-\left[-\frac{8}{3}\sin^3 x+4\sin x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\boxed{\frac{4}{3}(\sqrt{2}-1)}_{ク}.$$

4

(1)　$|\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=4$ であり，$\mathrm{AB}=5$ から，

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=5^2.$$
$$|\vec{b}-\vec{a}|^2=25.$$
$$|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{a}|^2=25.$$
$$16-2\vec{a}\cdot\vec{b}+4=25.$$
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\frac{5}{2}.\quad\cdots\cdots(答)$$

D は辺 AB を 1：3 に内分する点であるので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{3\vec{a}+\vec{b}}{1+3}=\frac{1}{4}(3\vec{a}+\vec{b}).$$

したがって，

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|^2&=\frac{1}{4^2}|3\vec{a}+\vec{b}|^2\\&=\frac{1}{16}(9|\vec{a}|^2+6\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2)\\&=\frac{1}{16}\left\{9\cdot4+6\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)+16\right\}\\&=\frac{37}{16}.\end{aligned}$$

ゆえに $\mathrm{OD}=\dfrac{\sqrt{37}}{4}$.　……(答)

(2)　H は直線 OD 上にあるので，k を実数として，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=k\overrightarrow{\mathrm{OD}}.$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=k\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\vec{a}.$$

$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=0$．したがって，

$$(k\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\vec{a})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=0.$$
$$k|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|^2-\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=0.$$

(1)より $|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|^2=\dfrac{37}{16}$ および

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}&=\frac{1}{4}\vec{a}\cdot(3\vec{a}+\vec{b})\\&=\frac{1}{4}(3|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b})\\&=\frac{1}{4}\left(3\cdot4-\frac{5}{2}\right)=\frac{19}{8},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}&=\frac{1}{4}\vec{b}\cdot(3\vec{a}+\vec{b})\\&=\frac{1}{4}(3\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2)\\&=\frac{1}{4}\left\{3\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)+16\right\}=\frac{17}{8}.\end{aligned}$$

であることに注意．したがって，

$$\frac{37}{16}k-\frac{19}{8}=0\quad ゆえに\quad k=\frac{38}{37}.$$

以上から，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}}&=\frac{38}{37}\cdot\frac{1}{4}(3\vec{a}+\vec{b})\\&=\frac{57}{74}\vec{a}+\frac{19}{74}\vec{b}.\quad\cdots\cdots(答)\end{aligned}$$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ であるので，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=t\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\vec{a}.$$

つまり，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}}&=t\cdot\frac{1}{4}(3\vec{a}+\vec{b})-\vec{a}\\&=\frac{1}{4}(3t-4)\vec{a}+\frac{1}{4}t\vec{b}.\quad\cdots\cdots(答)\end{aligned}$$

(4)　$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=t\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\vec{b}$

であるので，

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}\\&=(t\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\vec{a})\cdot(t\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\vec{b})\\&=|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|^2t^2-(\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}})t+\vec{a}\cdot\vec{b}\\&=\frac{37}{16}t^2-\left(\frac{19}{8}+\frac{17}{8}\right)t-\frac{5}{2}\\&=\frac{37}{16}\left(t^2-\frac{72}{37}t\right)-\frac{5}{2}\\&=\frac{37}{16}\left(t-\frac{36}{37}\right)^2-\frac{347}{74}.\end{aligned}$$

$0<t<1$ において $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ が最小となるのは，

$$t=\frac{36}{37}\quad\cdots\cdots(答)$$

のときである．このとき，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PH}}&=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}\\&=\frac{38}{37}\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\frac{36}{37}\overrightarrow{\mathrm{OD}}\\&=\frac{2}{37}\overrightarrow{\mathrm{OD}}.\end{aligned}$$

(1)より，

$$\begin{aligned}\mathrm{PH}&=|\overrightarrow{\mathrm{PH}}|=\frac{2}{37}|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|\\&=\frac{2}{37}\cdot\frac{\sqrt{37}}{4}=\frac{\sqrt{37}}{74}.\quad\cdots\cdots(答)\end{aligned}$$