1

(1)　$f(x)=2x^3+ax^2-1$.

$f(x)=0$ が $x=-1$ を解にもつとき，

$f(-1)=0$ が成り立つから，

$$2\cdot(-1)^3+a\cdot(-1)^2-1=0.$$

$$a=3. \cdots(\text{答})$$

このとき，

$$f(x)=2x^3+3x^2-1$$
$$=(2x-1)(x+1)^2$$

であるから，方程式 $f(x)=0$ の解は，

$$x=\frac{1}{2},\ -1. \cdots(\text{答})$$

(2)　$f(x)=2x^3+3x^2-1$

より，

$$f'(x)=6x^2+6x$$
$$=6x(x+1)$$

であるから，$f(x)$ の増減は次のようになる．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	0	↘	-1	↗

したがって，関数 $f(x)$ の極値は，

$x=-1$ で極大値 0,
$x=0$ で極小値 -1. $\cdots$(答)

(3)　方程式 $f(x)=0$ が異なる3つの実数解をもつ条件は，

「$y=f(x)$ のグラフが x 軸と3つの共有点をもつこと」$\cdots(*)$

である．

$$f(x)=2x^3+ax^2-1$$

より，

$$f'(x)=6x^2+2ax$$
$$=2x(3x+a)$$

であるから，$f(x)$ の増減は次のようになる．

(ア) $0<-\frac{a}{3}$ すなわち $a<0$ のとき．

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$-\frac{a}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	-1	↘		↗

(イ) $a=0$ のとき．

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	↗	-1	↗

(ウ) $a>0$ のとき．

x	$\cdots$	$-\frac{a}{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘	-1	↗

$(*)$ を満たすことができるのは，(ウ)のときだけであり，a の値の範囲は，

$$a>0 \text{ かつ } f\left(-\frac{a}{3}\right)>0$$

より，

$$a>0 \text{ かつ } \frac{a^3}{27}-1>0.$$

$$a>0 \text{ かつ } a^3>27.$$

$$a>3. \cdots(\text{答})$$

2

(1)　$a_n=\sqrt{n^2+1}$ より，

$$(n+1)^2-a_n{}^2=(n+1)^2-(n^2+1)$$
$$=2n$$
$$>0$$

であるから，

$$(n+1)^2>a_n{}^2.$$

　したがって，$n+1>0$，$a_n>0$ より，

$$a_n<n+1$$

が成り立つ．

（証明終り）

(2)　(1)の結果より，

$$a_n<n+1. \qquad \cdots①$$

　また，

$$a_n=\sqrt{n^2+1}>\sqrt{n^2}=n$$

より，

$$n<a_n \qquad \cdots②$$

　①，②より，

$$n<a_n<n+1$$

であるから，a_n の整数部分は n であり，
小数部分 b_n は，

$$b_n=a_n-n$$
$$=\sqrt{n^2+1}-n. \qquad \cdots(答)$$

(3)　背理法を用いて証明する．
　2つの異なる自然数 m, n に対して，

$$b_m=b_n$$

であると仮定する．
　このとき，(2)の結果より，

$$\sqrt{m^2+1}-m=\sqrt{n^2+1}-n.$$
$$\sqrt{m^2+1}-\sqrt{n^2+1}=m-n.$$
$$\frac{(m^2+1)-(n^2+1)}{\sqrt{m^2+1}+\sqrt{n^2+1}}=m-n.$$
$$\frac{(m+n)(m-n)}{\sqrt{m^2+1}+\sqrt{n^2+1}}=m-n.$$

　$m\neq n$ より，

$$\frac{m+n}{\sqrt{m^2+1}+\sqrt{n^2+1}}=1$$

すなわち，

$$m+n=\sqrt{m^2+1}+\sqrt{n^2+1}. \qquad \cdots③$$

　しかし，

$$m<\sqrt{m^2+1},\ n<\sqrt{n^2+1}$$

より，

$$m+n<\sqrt{m^2+1}+\sqrt{n^2+1}$$

であるから，③ は成り立たず矛盾する．
　よって，$b_m\neq b_n$ である．

（証明終り）

3

組 $(a,\ b)$ は全部で，

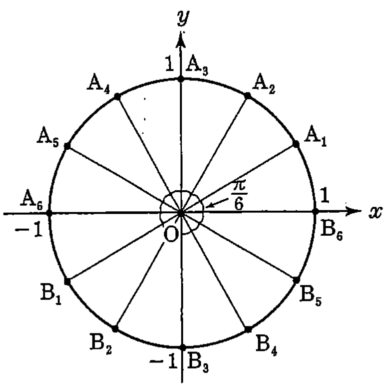
$6^2=36$（通り）

あり，これらは同様に確からしい．

これらの a，b に対して，座標平面上の点を

$$A_a\left(\cos\frac{a}{6}\pi,\ \sin\frac{a}{6}\pi\right),$$
$$B_b\left(\cos\frac{b+6}{6}\pi,\ \sin\frac{b+6}{6}\pi\right)$$

のように定めると，次のように単位円周上に並ぶ．



(1)　3 点 O，A，B が一直線上にあるのは，

$\angle AOB=\pi$

となるときであり，これを満たす組 $(a,\ b)$ は，

$(a,\ b)=(1,\ 1),\ (2,\ 2),\ (3,\ 3),$
$(4,\ 4),\ (5,\ 5),\ (6,\ 6)$

の 6 通りある．

よって，求める確率は，

$$\frac{6}{36}=\frac{1}{6}.\quad\cdots(答)$$

(2)　3 点 O，A，B が一直線上にないとき，三角形 OAB は $OA=OB=1$ の二等辺三角形であり，$\angle AOB$ の大きさに注目すると，

$$\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{2}{3}\pi,\ \frac{5}{6}\pi$$

のいずれかである．

ここで，三角形 OAB の面積を S とすると，

$$S=\frac{1}{2}OA\cdot OB\sin\angle AOB$$
$$=\frac{1}{2}\sin\angle AOB\ 。$$

したがって，$S\leqq\frac{1}{4}$ となるのは，

$$\angle AOB=\frac{\pi}{6}\ \text{または}\ \angle AOB=\frac{5}{6}\pi$$

となるときであり，これを満たす組 $(a,\ b)$ は，

$(a,\ b)=(1,\ 2),\ (1,\ 6),\ (2,\ 1),\ (2,\ 3),$
$(3,\ 2),\ (3,\ 4),\ (4,\ 3),\ (4,\ 5),$
$(5,\ 4),\ (5,\ 6),\ (6,\ 1),\ (6,\ 5)$

の 12 通りある．

よって，求める確率は，

$$\frac{12}{36}=\frac{1}{3}.\quad\cdots(答)$$

(3)　余事象

「2 点 A，B 間の距離が 1 以下」

となるときについて考える．

3 点 O，A，B が一直線上にあるとき，

$AB=2$

となるから，不適．

3 点 O，A，B が一直線上にないとき，(2) と同様に二等辺三角形 OAB の $\angle AOB$ の大きさに注目すると，

$$\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{2}{3}\pi,\ \frac{5}{6}\pi$$

のいずれかである．

ここで，三角形 OAB において余弦定理より，

$$AB^2=OA^2+OB^2-2OA\cdot OB\cos\angle AOB$$
$$=2-2\cos\angle AOB.$$

したがって，$AB\leqq1$ すなわち $AB^2\leqq1$ となるのは，

$$\angle AOB=\frac{\pi}{6}\ \text{または}\ \angle AOB=\frac{\pi}{3}$$

となるときであり，これを満たす組 $(a,\ b)$ は，

$(a,\ b)=(1,\ 6),\ (1,\ 5),\ (2,\ 6),$
$(5,\ 1),\ (6,\ 1),\ (6,\ 2)$

の 6 通りある．

よって，求める確率は，

$$1-\frac{6}{36}=\frac{5}{6}.\quad\cdots(答)$$