$\boxed{1}$

(1) $h(x)=x^3-x$ とすると，

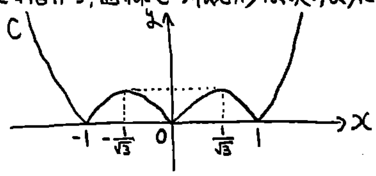
$$h'(x)=3x^2-1$$
$$=3\left(x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

より，$h(x)$ の増減は次のようになる．

x	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\nearrow$	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\searrow$	$-\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\nearrow$

$$f(x)=|x^3-x|\ (=|h(x)|)$$
$$=|x(x+1)(x-1)|$$
$$=\begin{cases} x(x+1)(x-1) & (-1\leqq x\leqq 0,\ 1\leqq x), \\ -x(x+1)(x-1) & (x<-1,\ 0<x<1) \end{cases}$$

であるから，曲線 C の概形は次のようになる．



(2) 直線 $l: y=k(x+1)$ は，

「点 $(-1,0)$ を通る傾き k の直線」

である．

直線 l が曲線 $y=-h(x)$ と点 $(-1,0)$ でない点で接するような k の値を求める．

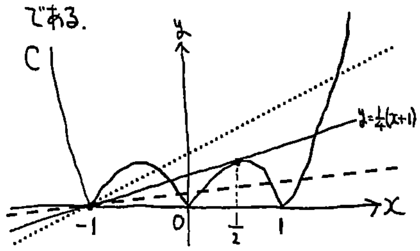
直線 l と曲線 $y=-h(x)$ の共有点の x 座標は，

$$g(x)=-h(x) \iff k(x+1)=-x(x+1)(x-1)$$
$$\iff (x+1)(x^2-x+k)=0$$
$$\iff (x+1)\left\{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+k\right\}=0$$

の実数解であり，これが $x\neq -1$ である重解をもつのは，

$$k=\frac{1}{4}\ \left(\text{重解は } x=\frac{1}{2}\right)$$

である．



図より，曲線 C と直線 l の共有点は，

$k=\frac{1}{4}$ のとき 4個，

$0<k<\frac{1}{4}$ のとき 5個，

$k\leqq 0,\ \frac{1}{4}<k$ のとき 3個以下．

したがって，求める k の値は，

$$k=\frac{1}{4}. \quad \cdots(\text{答})$$

2

(1)
$$a_n=\sqrt{n^2+1}-n$$
$$=\frac{(n^2+1)-n^2}{\sqrt{n^2+1}+n}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}.$$

ここで，nは自然数であるから，
$$\sqrt{n^2+1}+n>2$$
であり，
$$0<\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}<1.$$
よって，$0<a_n<1$が成り立つ．

（証明終り）

(2)
$$3n-\frac{1}{a_n}=3n-(\sqrt{n^2+1}+n)$$
$$=2n-\sqrt{n^2+1}.$$
ここで，nは自然数であるから，
$$n^2<n^2+1<(n+1)^2$$
より，
$$n<\sqrt{n^2+1}<n+1.$$
$$-n-1<-\sqrt{n^2+1}<-n.$$
$$n-1<2n-\sqrt{n^2+1}<n.$$
$$n-1<3n-\frac{1}{a_n}<n.$$
これより，$3n-\frac{1}{a_n}$の整数部分は$n-1$であるから，
$$b_n=\left(2n-\sqrt{n^2+1}\right)-(n-1)$$
$$=n+1-\sqrt{n^2+1}. \quad \cdots(\text{答})$$

(3) 背理法を用いて証明する．

2つの異なる自然数m, nに対して，
$$a_m+b_n=1$$
であると仮定する．

このとき，(2)の結果より，
$$\left(\sqrt{m^2+1}-m\right)+\left(n+1-\sqrt{n^2+1}\right)=1.$$
$$\sqrt{m^2+1}-\sqrt{n^2+1}=m-n.$$
$$\frac{(m^2+1)-(n^2+1)}{\sqrt{m^2+1}+\sqrt{n^2+1}}=m-n.$$
$$\frac{(m+n)(m-n)}{\sqrt{m^2+1}+\sqrt{n^2+1}}=m-n.$$
$m\neq n$より，
$$\frac{m+n}{\sqrt{m^2+1}+\sqrt{n^2+1}}=1$$
すなわち，
$$m+n=\sqrt{m^2+1}+\sqrt{n^2+1}. \quad \cdots①$$
しかし，
$$m<\sqrt{m^2+1},\ n<\sqrt{n^2+1}$$
より，
$$m+n<\sqrt{m^2+1}+\sqrt{n^2+1}$$
であるから，①は成り立たず矛盾する．

よって，$a_m+b_n\neq 1$である．

（証明終り）

3

(1)

$$\begin{cases} x(\theta)=\sin\theta \\ y(\theta)=\cos\theta+|\sin\theta| \end{cases} \quad (0\leqq\theta\leqq 2\pi)$$

とおくと，

$$\begin{cases} x(2\pi-\theta)=-\sin\theta=-x(\theta) \\ y(2\pi-\theta)=\cos\theta+|\sin\theta|=y(\theta) \end{cases}$$

であるから C は $0\leqq\theta\leqq\pi$ の部分と $\pi\leqq\theta\leqq 2\pi$ の部分が y 軸対称.

$0\leqq\theta\leqq\pi$ において,

$$y(\theta)=\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$

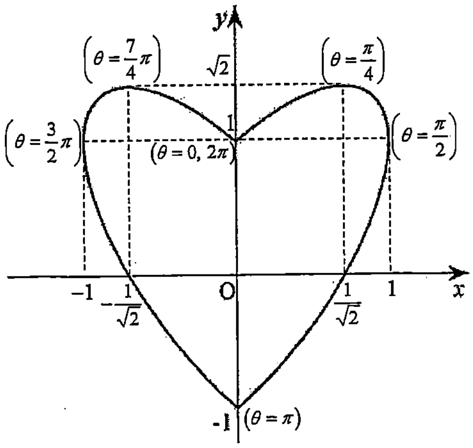
であり，$0<\theta<\pi$ において，

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\theta}=\cos\theta, \\ \dfrac{dy}{d\theta}=\cos\theta-\sin\theta=-\sqrt{2}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right), \end{cases}$$

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{d\theta}$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$\frac{dy}{d\theta}$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$
$\vec{v}$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$	$\downarrow$	$\swarrow$	$\swarrow$
$(x,\ y)$	$(0,1)$		$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{2}\right)$		$(1,1)$		$(0,-1)$

$\left(\text{ただし, } \vec{v}=\left(\dfrac{dx}{d\theta},\dfrac{dy}{d\theta}\right)\text{とする.}\right)$

以上より，C の概形は次の通り.



(2) 求める面積を S とし，$\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\pi$ および $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$ における C 上の点の x を順に x_1, x_2 とおくと，

$$\begin{aligned}
S&=2\left(\int_{-1}^{\sqrt{2}}x_1\,dy-\int_{1}^{\sqrt{2}}x_2\,dy\right)\\
&=2\left(\int_{\pi}^{\frac{\pi}{4}}x(\theta)\frac{dy}{d\theta}d\theta-\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}x(\theta)\frac{dy}{d\theta}d\theta\right)\\
&=2\left(\int_{\pi}^{\frac{\pi}{4}}x(\theta)\frac{dy}{d\theta}d\theta+\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}x(\theta)\frac{dy}{d\theta}d\theta\right)\\
&=2\int_{\pi}^{0}x(\theta)\frac{dy}{d\theta}d\theta\\
&=2\int_{0}^{\pi}\left(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta\right)d\theta\\
&=2\int_{0}^{\pi}\left\{\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right\}d\theta\\
&=\left[\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta\right]_{0}^{\pi}\\
&=\pi. \quad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}$$

4

(1)　O を原点とする．

$\overrightarrow{OA}=(-4,-1,0)$，$\overrightarrow{OB}=(-3,0,-1)$，

$\overrightarrow{OP}=(s,t,-2s+t-1)$ より，

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(1,1,-1)$，

$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=(s+4,t+1,-2s+t-1)$．

3 点 A, B, P が一直線上に存在すると仮定する．

このとき，

$$\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AB}$$

すなわち，

$$\begin{cases} s+4=k, & \cdots① \\ t+1=k, & \cdots② \\ -2s+t-1=-k & \cdots③ \end{cases}$$

を満たす実数 k が存在する．

①，②より，$s=k-4$，$t=k-1$ であり，③に代入すると，

$$-2(k-4)+(k-1)-1=-k$$

であるが，上式を整理すると，

$$6=0$$

となり，矛盾する．

よって，仮定は誤りで，3 点 A, B, P は一直線上にない．

（証明終り）

(2)　点 H は直線 AB 上にあるので，

$$\overrightarrow{AH}=k\overrightarrow{AB}=(k,k,-k)$$

を満たす実数 k が存在する．

このとき，

$\overrightarrow{PH}=\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AP}=(k-s-4,k-t-1,-k+2s-t+1)$

であり，$AB\perp PH$ より，

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{PH}=3k-3s-6=0.$$

よって，$k=s+2$ であり，

$$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AH}=(s-2,s+1,-s-2)$$

であるから，点 H の座標は，

$(s-2,s+1,-s-2)$．　…(答)

(3)　(2) の過程を踏まえると，$k=s+2$ であり，

$$\overrightarrow{PH}=(-2,s-t+1,s-t-1).$$

三角形 ABP の面積を S とおくと，

$$\begin{aligned} S&=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{PH}| \\ &=\frac{1}{2}\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}\sqrt{(-2)^2+(s-t+1)^2+(s-t-1)^2} \\ &=\frac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{(s-t)^2+3}. \end{aligned}$$

よって，S は $s=t$ のとき，最小値

$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$　…(答)

をとる．

5

(1) $I(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ とおくと, $I(x)$ は閉区間 $(1,\ t)$ において微分可能であり,

$$I'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$$
$$=0. \qquad (f(x)-xf'(x)=0 \text{ より})$$

また, $f(x)$ は閉区間 $[1,\ t]$ において連続であるから, この区間において $I(x)$ も連続である.

よって, $I(x)$, すなわち $\dfrac{f(x)}{x}$ は定数である.

(証明終り)

(2) 条件より, $t \geqq 1$ のとき,

$$g(t)=\sqrt{t^2+\{f(t)\}^2},$$
$$h(t)=\int_1^t \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}dx.$$

$g(t)=h(t)+2$ より,

$$\sqrt{t^2+\{f(t)\}^2}=\int_1^t \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}dx+2. \quad \cdots(*)$$

$t=1$ を代入すると,

$$\sqrt{1+\{f(1)\}^2}=2.$$

両辺正より,

$$1+\{f(1)\}^2=4.$$

$x \geqq 0$ で $f(x) \geqq 0$ より,

$$f(1)=\sqrt{3}. \quad \cdots(\text{答})$$

また, $t>1$ において, $(*)$ の両辺を微分すると,

$$\frac{t+f(t)f'(t)}{\sqrt{t^2+\{f(t)\}^2}}=\sqrt{1+\{f'(t)\}^2}.$$

$$t+f(t)f'(t)=\sqrt{t^2+\{f(t)\}^2}\sqrt{1+\{f'(t)\}^2}.$$

両辺平方すると,

$$\{t+f(t)f'(t)\}^2=(t^2+\{f(t)\}^2)(1+\{f'(t)\}^2).$$

整理して,

$$t^2\{f'(t)\}^2-2tf(t)f'(t)+\{f(t)\}^2=0.$$
$$\{tf'(t)-f(t)\}^2=0.$$

よって,

$$tf'(t)-f(t)=0.$$

このとき, $t+f(t)f'(t)=t+t\{f'(t)\}^2>0$ を満たす.

したがって, (1) より $\dfrac{f(t)}{t}$ $(t \geqq 1)$ は定数であり, $f(1)=\sqrt{3}$ であるから,

$$\frac{f(t)}{t}=\frac{f(1)}{1}=\sqrt{3}.$$

以上より,

$$f(t)=\sqrt{3}t. \quad \cdots(\text{答})$$