［I］

(1) 身長を X として，$Z=\dfrac{X-158}{5}$ とおくと，Z は正規分布 $N\left(0,1\right)$ に従う．

$153 \leqq X \leqq 170.5 \Leftrightarrow -1 \leqq Z \leqq 2.5$ であるから，求める確率は $p\left(1\right)+p\left(2.5\right)=0.8351$ となり，四捨五入して，$\boxed{84}$％．　…（あ）（答）

$X=148 \Leftrightarrow Z=-2$ より 148cm の生徒は $0.5-p\left(2\right)=0.0228$，すなわち低い方から 2.28％の中に入る．

$X=149 \Leftrightarrow Z=-1.8$ より 149cm の生徒は $0.5-p\left(1.8\right)=0.0359$，すなわち低い方から 3.59％の中に入る．よって，確実に低い方から 2.5％の中に入ると言える身長は $\boxed{148}$ cm 以下である．　…（い）（答）

（注）

題意を『Xcm 以下ならば低い方から 2.5％の中に入る』と解釈した．『低い方から 2.5％の中に入るならば Xcm 以下』を満たす**最も小さい**整数 X であれば 149 となるが，題意は**最も大きい**整数であるから，前者のような解釈とした．　（**（注）** 終り）

(2) $\displaystyle\int_1^e rx\log x dx = r\left[\frac{1}{2}x^2\log x-\frac{1}{4}x^2\right]_1^e = r\cdot\frac{e^2+1}{4}=1$ となればよいので

$$r=\boxed{\frac{4}{e^2+1}}.$$
…（う）（答）

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin^3\left(\frac{k\pi}{2n}\right)=\int_0^1\sin^3\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx$ であり，さらに $\dfrac{\pi}{2}x=t$ とおいて

$$\begin{aligned}\int_0^1\sin^3\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t dt\\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^2 t-1\right)\left(-\sin t\right)dt\\ &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{3}\cos^3 t-\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\ &= \boxed{\frac{4}{3\pi}}.\end{aligned}$$
…（え）（答）

(4) $z=r\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)\left(r>0, 0\leqq\theta<2\pi\right)$ とおいて代入すると

$$r^3\left(\cos 3\theta+i\sin 3\theta\right)=24\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

と表されるから

［Ⅰ］（つづき）

$$r^3=24,\quad 3\theta=\frac{\pi}{3}+2k\pi\left(k=0,1,2\right)$$

すなわち

$$r=2\cdot 3^{\frac{1}{3}},\quad \theta=\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}\left(k=0,1,2\right)$$

となる．よって，三角形 ABC は原点 O を外心とする正三角形であることがわかり

$$\left|\alpha\right|=\left|\beta\right|=\left|\gamma\right|=r=2\cdot 3^{\frac{1}{3}}$$

であるから

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABC}&=3\cdot\triangle\mathrm{OAB}=3\cdot\frac{1}{2}r^2\sin\frac{2\pi}{3}\\&=3\cdot\frac{1}{2}\left(2\cdot 3^{\frac{1}{3}}\right)^2\cdot\frac{1}{2}\cdot 3^{\frac{1}{2}}\\&=3^{\frac{13}{6}}\end{aligned}$$

となる．よって，$s=\boxed{\frac{13}{6}}$.　　　…（お）（答）

(5) $\dfrac{a\sqrt{2}+b}{c\sqrt{2}+d}=2\sqrt{2}$ を変形して

$$\left(b-4c\right)+\left(a-2d\right)\sqrt{2}=0$$

を得る．ここで，$a\neq 2d$ と仮定すると

$$\sqrt{2}=-\frac{b-4c}{a-2d}$$

とできるが，左辺は無理数，右辺は有理数となり矛盾である．

よって $a=2d$ が成り立ち，$b=4c$ もわかる．これらを $ad+bc=18$ に代入して

$$d^2+2c^2=9$$

が得られ，$a\geqq 0, b\geqq 0$ より $c\geqq 0, d\geqq 0$ であるから，$c=0,1,2$ に限られる．

(i)　$c=0$ のとき

$d^2=9$ より $d=3$ となり，$a=6, b=0$.

(ii)　$c=1$ のとき

$d^2=7$ より整数 d は存在しない．

(iii)　$c=2$ のとき

$d^2=1$ より $d=1$ となり，$a=2, b=8$.

以上より，$\left(a,b,c,d\right)=\left(6,0,0,3\right),\left(2,8,2,1\right)$.　　　…（答）

［Ⅱ］

(1) 操作Tをn回終えたときに白玉がm個である状態をD_mとする．($m=0,1,2,3$)
n回の操作後から，もう1回操作Tを行うときの状態の推移とその確率は，次の表のようになる．

$n+1$ \ n	D_3	D_2	D_1	D_0	
D_3	$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$	0	0	0	← 確率はa_{n+1}
D_2	$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	0	0	← b_{n+1}
D_1	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{4}$	0	← c_{n+1}
D_0	0	0	$\frac{1}{4}$	1	

したがって
$$\begin{cases} a_{n+1}=\boxed{\frac{1}{2}}a_n \\ b_{n+1}=\boxed{\frac{1}{2}}a_n+\boxed{\frac{3}{5}}b_n \\ c_{n+1}=\boxed{\frac{2}{5}}b_n+\boxed{\frac{3}{4}}c_n \end{cases}$$
---（あ）～（お）（答）

$a_1=\frac{1}{2}$であり　$a_n=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\boxed{\left(\frac{1}{2}\right)^n}$　---（か）（答）

$b_1=\frac{1}{2}$であり　$b_{n+1}=\frac{3}{5}b_n+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$　——①

ここで　$d_{n+1}=\frac{3}{5}d_n$，$d_n=b_n+\alpha\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$を満たす数列$\{d_n\}$をおく．

$$b_{n+1}+\alpha\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}=\frac{3}{5}\left\{b_n+\alpha\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}$$
$$\therefore\ b_{n+1}=\frac{3}{5}b_n+\frac{\alpha}{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

これが①と一致するとき$\alpha=10$．したがって，$d_n=b_n+5\left(\frac{1}{2}\right)^n$とおけば，

$$d_1=b_1+\frac{5}{2}=3,\quad d_{n+1}=\frac{3}{5}d_n.$$

故に　$d_n=3\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}=5\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^n.$

$$\therefore b_n=\boxed{5}\left\{\left(\boxed{\frac{3}{5}}\right)^n-\left(\boxed{\frac{1}{2}}\right)^n\right\}.$$
---（き）（く）（け）（答）

[Ⅱ]（つづき）

$c_1=0$ であり $c_{n+1}=\frac{3}{4}c_n+2\left\{\left(\frac{3}{5}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$ ――②

ここで $e_{n+1}=\frac{3}{4}e_n$, $e_n=c_n+y\left(\frac{3}{5}\right)^n+z\left(\frac{1}{2}\right)^n$ を満たす数列 $\{e_n\}$ をおく。

$$c_{n+1}+y\left(\tfrac{3}{5}\right)^{n+1}+z\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1}=\frac{3}{4}\left\{c_n+y\left(\tfrac{3}{5}\right)^n+z\left(\tfrac{1}{2}\right)^n\right\}$$

$$\therefore c_{n+1}=\frac{3}{4}c_n+\frac{3y}{20}\left(\frac{3}{5}\right)^n+\frac{z}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

これが②と一致するので $\frac{3y}{20}=2$, $\frac{z}{4}=-2$ $\therefore y=\frac{40}{3}$, $z=-8$

したがって $e_n=c_n+\frac{40}{3}\left(\frac{3}{5}\right)^n-8\left(\frac{1}{2}\right)^n$ とおけば、

$$e_1=4,\quad e_{n+1}=\frac{3}{4}e_n.$$

よって $e_n=4\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

$$\therefore c_n=4\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}-\frac{40}{3}\left(\frac{3}{5}\right)^n+8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$=\boxed{4}\left\{\left(\boxed{\frac{3}{4}}\right)^{n-1}+\boxed{(-2)}\left(\boxed{\frac{3}{5}}\right)^{n-1}+\left(\boxed{\frac{1}{2}}\right)^{n-1}\right\}$$ ---（こ）～（せ）（答）

(2) $X_n=k$ $(k=0,1,\cdots,n-1)$ のときは、1回目から k 回目まで赤玉を取り出し、$k+1$ 回目に白玉を取り出す（その後はどちらを取り出してもよい）から、その確率は

$$P(X_n=k)=a_k\times\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}.$$

$X_n=n$ のときは、1回目から n 回目まで赤玉を取り出す場合であり、$P(X_n=n)=a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$

したがって、Y_n の期待値 $E(Y_n)$ は

$$E(Y_n)=\sum_{k=0}^{n-1}2^k\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}+2^n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)+1=\boxed{\frac{1}{2}n+1}$$ ---（そ）（答）

また Y_n の分散 $V(Y_n)$ は、

$$V(Y_n)=E(Y_n^2)-\{E(Y_n)\}^2$$

ここで $E(Y_n^2)=\sum_{k=0}^{n-1}(2^k)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}+(2^n)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}2^{k-1}+2^n$$

$$=3\cdot2^{n-1}-\frac{1}{2}.$$

したがって $V(Y_n)=3\cdot2^{n-1}-\frac{1}{2}-\left(\frac{n}{2}+1\right)^2$

$$=\boxed{3}\,2^{n-1}+\boxed{\frac{-1}{4}}n^2+\boxed{(-1)}n+\boxed{\frac{-3}{2}}$$ ---（た）～（て）（答）

[Ⅲ]

(1)

(i)　$P(x)=3x^3-9x^2+7x,\ Q(x)=2x^2+1$ より，

$$\begin{aligned}P(Q(x))&=3(2x^2+1)^3-9(2x^2+1)^2+7(2x^2+1)\\&=\boxed{24x^6-4x^2+1}\end{aligned}\qquad\cdots(あ)（答）$$

である．

(ii)　$G(H(x))=0$ が x についての恒等式であるとき，

$$「a_m=\cdots=a_0=0 \text{ ではない}」\qquad\cdots(*)$$

と仮定して矛盾を導く．

まず，$G(H(x))=0$ であるから，$(*)$ のもとでは，$G(x)=a_mx^m+\cdots+a_1x+a_0$ は 1 次以上の多項式であり，その次数を $N\ (1\leqq N\leqq m)$ とおくことができる．

一方，$b_n\neq 0$ より，多項式 $H(x)=b_nx^n+\cdots+b_1x+b_0$ について

$$\lim_{x\to+\infty}H(x)=\begin{cases}+\infty & (b_n>0 \text{ のとき}),\\ -\infty & (b_n<0 \text{ のとき})\end{cases}$$

が成り立つので，関数 $H(x)$ は少なくとも $N+1$ 個の異なる実数の値

$$H(x)=c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_N,\ c_{N+1}$$

をとる．よって，$G(H(x))=0$ より $G(c_1)=G(c_2)=\cdots=G(c_N)=0$ であるから，因数定理により，$G(x)$ は異なる N 個の 1 次式 $(x-c_k)\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ N)$ で割り切ることができ，

$$G(x)=A(x-c_1)(x-c_2)\cdots(x-c_N)\quad(A \text{ は } A\neq 0 \text{ を満たす実数})$$

と表せる．この式に $x=c_{N+1}$ を代入すると

$$G(c_{N+1})=A(c_{N+1}-c_1)(c_{N+1}-c_2)\cdots(c_{N+1}-c_N)$$

となり，これは 0 でない実数であるが，$G(H(x))=0$ より $G(c_{N+1})=0$ であるから矛盾が生じる．

以上より，$(*)$ を仮定すると矛盾が生じるので，$a_m=\cdots=a_0=0$ である．（証明終り）

(2)

(i)　まず，$f(x)$ は 0 でない多項式であるから，

$$g(x)=\int_0^x f(t)\,dt,\ h(x)=\int_x^1 f(t)\,dt\qquad\cdots①$$

で定まる関数 $g(x)$，$h(x)$ はいずれも 1 次以上の多項式であることに注意する．

①より，

$$g(x)+h(x)=\int_0^x f(t)\,dt+\int_x^1 f(t)\,dt=\int_0^1 f(t)\,dt=g(1)=\boxed{a}\qquad\cdots(い)（答）$$

すなわち $g(x)=a-h(x)$ であり，x についての恒等式

$$g(h(x))-\left(\{h(x)\}^3+b\{g(x)\}^2+ch(x)+d\right)=0$$

すなわち，$g(h(x))-\left(\{h(x)\}^3+b\{a-h(x)\}^2+ch(x)+d\right)=0$

[Ⅲ]（つづき 1）

が成り立つので，$G(x)=g(x)-\{x^3+b(a-x)^2+cx+d\}$, $H(x)=h(x)$ とおけば $G(H(x))=0$ であるから，(1)(ii) の結果を用いることができ，恒等的に $G(x)=0$ である．すなわち，

$$g(x)=x^3+b(a-x)^2+cx+d \qquad \cdots②$$

が x の恒等式となる．

②より，

$$g(x)\text{ は }\boxed{3}\text{ 次式} \qquad \cdots(\text{う})(\text{答})$$

となるが，$g(1)=a$ であり，①より $g(0)=\int_0^0 f(t)\,dt=0$ であり，さらに $g'(x)=f(x)$ であるから，$g'(1)=f(1)=2(1-a)$ となる．このことと②および $g'(x)=3x^2-2b(a-x)+c$ より，連立方程式

$$\begin{cases} g(1)=a\ , \\ g(0)=0\ , \\ g'(1)=2(1-a) \end{cases} \quad \text{すなわち,} \quad \begin{cases} 1+b(a-1)^2+c+d=a\ , \\ a^2b+d=0\ , \\ 3-2b(a-1)+c=2(1-a) \end{cases}$$

が成り立つので，これを b, c, d について解くと

$$b=\boxed{-3a}\ ,\ c=\boxed{-6a^2+4a-1}\ ,\ d=\boxed{3a^3} \qquad \cdots(\text{え})\sim(\text{か})(\text{答})$$

となる．

(ii)　$b=-3a$, $c=-6a^2+4a-1$, $d=3a^3$ を②に代入・整理すると，

$$g(x)=x^3-3ax^2+(4a-1)x \qquad \cdots③$$

となり，これを微分すると

$$g'(x)=3x^2-6ax^2+4a-1 \qquad \cdots④$$

となる．よって，$g(x)$ が極値をもつ条件は，2 次方程式 $g'(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつことであり，$g'(x)=0$ の判別式 D について，

$$\frac{D}{4}>0$$
$$(-3a)^2-3(4a-1)>0$$
$$9a^2-12a+3>0$$
$$3(3a-1)(a-1)>0$$
$$a<\boxed{\frac{1}{3}}\text{ または }a>\boxed{1} \qquad \cdots(\text{き})(\text{く})(\text{答})$$

が成り立つ．このとき，$g'(x)=0$ の 2 解を

$$\alpha=\frac{3a-\sqrt{9a^2-12a+3}}{3},\ \beta=\frac{3a+\sqrt{9a^2-12a+3}}{3}$$

とおくと，④は $g'(x)=3(x-\alpha)(x-\beta)$ となるから，$g(x)$ の増減は次のようになる．

[Ⅲ]（つづき 2）

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

これより，$g(x)$ は

$$x = \alpha = \boxed{\frac{3a - \sqrt{9a^2 - 12a + 3}}{3}} \quad \cdots（け）（答）$$

のとき極大値を M とり，方程式 $g(x) = M$ は $x = \alpha$ を重解にもつ．よって，もう 1 つの解を $x = \gamma$ とおくと，3 次方程式

$$g(x) - M = 0 \quad すなわち， \quad x^3 - 3ax^2 + (4a-1)x - M = 0$$

の解と係数の関係より，$\alpha + \alpha + \gamma = 3a$，すなわち

$$\gamma = 3a - 2\alpha = \boxed{\frac{3a + 2\sqrt{9a^2 - 12a + 3}}{3}} \quad \cdots（こ）（答）$$

が得られる．

(iii)　④より $g'(a) = -3a^2 + 4a - 1$ であるから，曲線 $y = g(x)$ の点 $(a,\ g(a))$ における接線の式は，

$$\begin{aligned} y &= g'(a)(x-a) + g(a) \\ &= (-3a^2 + 4a - 1)(x-a) - 2a^3 + 4a^2 - a \\ &= (\boxed{-3a^2 + 4a - 1})x + \boxed{a^3} \end{aligned} \quad \cdots（さ）（し）（答）$$

である．これより，

$$g(x) - (-3a^2 + 4a - 1)x - a^3 = x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3 = (x-a)^3$$

であるから，

$$\begin{aligned} F(a) &= \int_0^a \left\{ g(x) - (-3a^2 + 4a - 1)x - a^3 - 2(x-a) \right\} e^{-\frac{(x-a)^2}{2}}\, dx \\ &= \int_0^a \left\{ (x-a)^3 - 2(x-a) \right\} e^{-\frac{(x-a)^2}{2}}\, dx \\ &= \int_{-a}^0 (t^3 - 2t) e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt \quad (t = x - a \text{ とおいた}) \\ &= \int_{-\frac{a^2}{2}}^0 (2u + 2) e^u\, du \quad \left(u = -\frac{t^2}{2} \text{ とおいた} \right) \\ &= 2\Big[\, ue^u \,\Big]_{-\frac{a^2}{2}}^0 \\ &= \boxed{a^2 e^{-\frac{a^2}{2}}} \end{aligned} \quad \cdots（す）（答）$$

となる．

[Ⅲ]（つづき 3）

よって，$F'(a)=a(2-a^2)e^{-\frac{a^2}{2}}$ となるので，$F(a)$ の増減は次のようになる．

a	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$F'(a)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$F(a)$	↗	極大	↘	極小	↗	極大	↘

表および $F\left(-\sqrt{2}\right)=F\left(\sqrt{2}\right)=\dfrac{2}{e}$ より，$F(a)$ の最大値は

$$\boxed{\frac{2}{e}}$$ $\cdots$（せ）（答）

である．

[IV]

(1)　問題の角度が等しいという条件より, 直線 $y=1$, $x=1$, $y=2$ で順次折り返していくと, 折れ線は一直線上に並ぶ (図1).

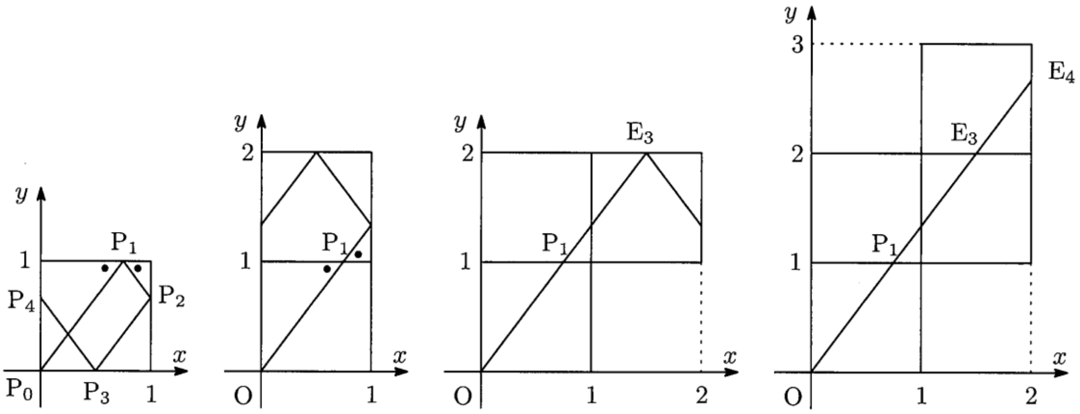

図1

$P_3(p,0)$ の $y=1$ に関する対称点は $(p,2)$. これの $x=1$ に関する対称点は $E_3(2-p,2)$ である. 直線 P_0E_3, すなわち, 直線 OE_3 の式は,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 2-p \\ 2 \end{pmatrix}. \qquad \cdots ①$$

① と $y=1$ の交点が $P_1\left(\dfrac{2-p}{2},1\right)$ である. よって,

$$p_1 = \boxed{1-\frac{p}{2}}. \qquad \cdots \textbf{(あ)(答)}$$

① と $x=1$ の交点は, $\left(1,\dfrac{2}{2-p}\right)$. これの $y=1$ に関する対称点 $\left(1,2-\dfrac{2}{2-p}\right)$ が P_2 であるから,

$$q_2 = \boxed{\frac{2-2p}{2-p}}. \qquad \cdots \textbf{(い)(答)}$$

① と $x=2$ の交点 E_4 は $\left(2,\dfrac{4}{2-p}\right)$ である. E_4 の y 座標が $2<\dfrac{4}{2-p}\leqq 3$ を満たす場合なので,

$$0<p\leqq\boxed{\frac{2}{3}}. \qquad \cdots \textbf{(う)(答)}$$

このとき, E_4 の $y=2$ に関する対称点 $\left(2,4-\dfrac{4}{2-p}\right)$ の $x=1$ に関する対称点は $\left(0,\dfrac{4-4p}{2-p}\right)$ である. これの $y=1$ に関する対称点 $\left(0,2-\dfrac{4-4p}{2-p}\right)$ が P_4 なので,

$$q_4 = \boxed{\frac{2p}{2-p}}. \qquad \cdots \textbf{(え)(答)}$$

$\dfrac{2}{3}\leqq p<1$ のとき, ① と $y=3$ の交点 $\left(\dfrac{3(2-p)}{2},3\right)$ の $y=2$ に関する対称点は $\left(\dfrac{3(2-p)}{2},1\right)$ である. これの $x=1$ に関する対称点 $\left(2-\dfrac{3(2-p)}{2},1\right)$ が P_4 なので,

$$p_4 = \boxed{\frac{3p-2}{2}} \qquad \cdots \textbf{(お)(答)}$$

[IV]　(つづき)

(2)　**(i)**　直線 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $y=1$ の交点は $\left(\dfrac{a_1}{b_1}, 1, 0\right)$ であるから,

$$a_2 = \boxed{\dfrac{a_1}{b_1}}. \qquad \cdots \textbf{(か)(答)}$$

(ii)　問題の角度が等しいという条件より, 平面 $z=1$, $y=1$, $z=2$ で順次折り返していくと, 折れ線は一直線上に並ぶ (図２).

$Q_3(a,b,0)$ の $z=1$ に関する対称点は $(a,b,2)$. これの $y=1$ に関する対称点は $F_3(a, 2-b, 2)$ である. 直線 Q_0F_3, すなわち, 直線 OF_3 の式は,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} a \\ 2-b \\ 2 \end{pmatrix}. \qquad \cdots ②$$

② と $z=1$ の交点が Q_1 である. よって,

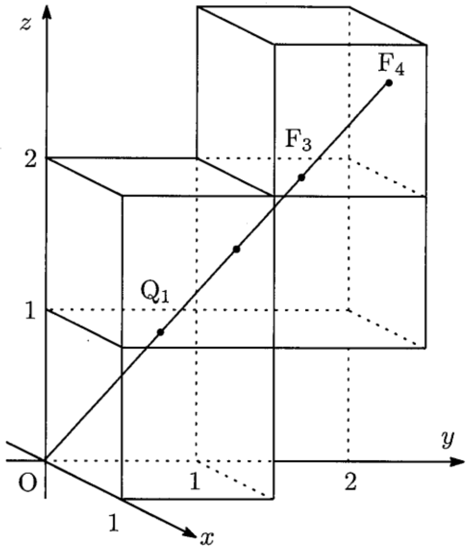

図２

$$a_1 = \boxed{\dfrac{a}{2}},\ b_1 = \boxed{\dfrac{2-b}{2}}. \qquad \cdots \textbf{(き)(く)(答)}$$

② と $y=1$ の交点は, $\left(\dfrac{a}{2-b}, 1, \dfrac{2}{2-b}\right)$. これの $z=1$ に関する対称点が Q_2 であるから,

$$a_2 = \boxed{\dfrac{a}{2-b}},\ c_2 = \boxed{\dfrac{2-2b}{2-b}}. \qquad \cdots \textbf{(け)(こ)(答)}$$

② と $y=2$ の交点 F_4 は $\left(\dfrac{2a}{2-b}, 2, \dfrac{4}{2-b}\right)$ である. F_4 の $z=2$ に関する対称点 $\left(\dfrac{2a}{2-b}, 2, \dfrac{4-4b}{2-b}\right)$ の $y=1$ に関する対称点は $\left(\dfrac{2a}{2-b}, 0, \dfrac{4-4b}{2-b}\right)$ である. これの $z=1$ に関する対称点 $\left(\dfrac{2a}{2-b}, 0, \dfrac{2b}{2-b}\right)$ が Q_4 である. この x 座標が 1 より $2a = 2-b$, z 座標が $0 < \dfrac{2b}{2-b} \leqq 1$ を満たす場合なので, $0 < b \leqq \dfrac{2}{3}$.
よって,

$$\boxed{\dfrac{2}{3}} \leqq a < 1. \qquad \cdots \textbf{(さ)(答)}$$

$$b = \boxed{2-2a}. \qquad \cdots \textbf{(し)(答)}$$

$$c_4 = \dfrac{2b}{2-b} = \dfrac{2(2-2a)}{2a} = \boxed{\dfrac{2-2a}{a}}. \qquad \cdots \textbf{(す)(答)}$$

$0 < a \leqq \dfrac{2}{3}$ かつ $\dfrac{2}{3} \leqq b < 1$ のとき, ② と $z=3$ の交点 $\left(\dfrac{3a}{2}, \dfrac{3(2-b)}{2}, 3\right)$ の $z=2$ に関する対称点は $\left(\dfrac{3a}{2}, \dfrac{3(2-b)}{2}, 1\right)$ である. これの $y=1$ に関する対称点が Q_4 なので,

$$\left(\boxed{\dfrac{3a}{2}}, \boxed{\dfrac{3b-2}{2}}, 1\right). \qquad \cdots \textbf{(せ)(そ)(答)}$$