1

(1)

$$|z+i|^2 = 4|z-\sqrt{3}|^2$$
$$(z+i)\,\overline{(z+i)} = 4(z-\sqrt{3})\,\overline{(z-\sqrt{3})}$$
$$z\,\overline{z} + i\,\overline{z} - iz + 1 = 4(z\,\overline{z} - \sqrt{3}\,\overline{z} - \sqrt{3}z + 3)$$
$$z\,\overline{z} + \left(-\frac{4\sqrt{3}}{3} - \frac{i}{3}\right)\overline{z} + \left(-\frac{4\sqrt{3}}{3} + \frac{i}{3}\right)z + \frac{11}{3} = 0$$
$$\left\{z + \left(-\frac{4\sqrt{3}}{3} - \frac{i}{3}\right)\right\}\left\{\overline{z} + \left(-\frac{4\sqrt{3}}{3} + \frac{i}{3}\right)\right\} = \frac{16}{9}$$
$$\left|z - \left(\frac{4\sqrt{3}}{3} + \frac{i}{3}\right)\right| = \frac{4}{3}$$

よって，求める図形は中心が $\boxed{\dfrac{4\sqrt{3}}{3} + \dfrac{i}{3}}$，半径が $\boxed{\dfrac{4}{3}}$ の円である．　$\cdots$(ア)(イ)(答)

【(1) の別解】

$z = x + yi$ (x, y は実数) とおくと，与式は，

$$|(x+yi)+i| = 2|(x+yi)-\sqrt{3}|$$
$$x^2 + (y+1)^2 = 4\{(x-\sqrt{3})^2 + y^2\}$$
$$x^2 + y^2 - \frac{8\sqrt{3}}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{11}{3} = 0$$
$$\left(x - \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$$

よって，求める図形は中心が $\dfrac{4\sqrt{3}}{3} + \dfrac{i}{3}$，半径が $\dfrac{4}{3}$ の円である．　((1) の別解終り)

【参考】

2 点 A$(-i)$，B$(\sqrt{3})$ をとると，点 P(z) は

$$\mathrm{AP} = 2\mathrm{BP}$$

つまり，

$$\mathrm{AP} : \mathrm{BP} = 2 : 1$$

これを満たす点 P の軌跡は，線分 AB を 2 : 1 に内分する点 $\dfrac{2\sqrt{3}-i}{3}$ と，線分 AB を 2 : 1 に外分する点 $2\sqrt{3}+i$ を直径の両端とする円である (これをアポロニウスの円という)．

1 (つづき1)

(2) 1から72までの自然数の中で，6または8または9で割り切れるものの集合をAとすると，Aの要素は，

6，8，9，12，16，18，24，27，30，32，36，40，42，45，48，54，56，60，63，64，66，72

の22個であるから，

$$a_{30} = \boxed{9}. \qquad \cdots(ウ)(答)$$

また，6，8，9の最小公倍数は72であるから，Aの要素の中で小さい方からm番目のものをb_mとすると，6または8または9で割り切れる正の整数は，

$$72l + b_m \ (l \text{ は } 0 \text{ 以上の整数，} m \text{ は } 22 \text{ 以下の正の整数})$$

と表される．

このことと$1000 = 22 \cdot 45 + 10$より，$a_n = 1000$を満たすnは，

$$72 \cdot 45 + b_{10} \leqq n < 72 \cdot 45 + b_{11}$$

すなわち，

$$72 \cdot 45 + 32 \leqq n < 72 \cdot 45 + 36$$

を満たすnである．

このうち，最大のものは，

$$72 \cdot 45 + 36 - 1 = \boxed{3275}. \qquad \cdots(エ)(答)$$

【(2) の別解】

$[x]$をxを超えない最大の整数とする．

1からnまでの自然数の中で，6または8または9で割り切れるものの個数a_nは，

$$a_n = \left[\frac{n}{6}\right] + \left[\frac{n}{8}\right] + \left[\frac{n}{9}\right] - \left[\frac{n}{24}\right] - \left[\frac{n}{72}\right] - \left[\frac{n}{18}\right] + \left[\frac{n}{72}\right]$$

$$= \left[\frac{n}{6}\right] + \left[\frac{n}{8}\right] + \left[\frac{n}{9}\right] - \left[\frac{n}{24}\right] - \left[\frac{n}{18}\right].$$

よって，

$$a_{30} = \left[\frac{30}{6}\right] + \left[\frac{30}{8}\right] + \left[\frac{30}{9}\right] - \left[\frac{30}{24}\right] - \left[\frac{30}{18}\right]$$

$$= 9.$$

ここで，$x - 1 < [x] \leqq x$が成り立つことを用いると，

$$\frac{11}{36}n - 3 < a_n < \frac{11}{36}n + 2$$

が成り立つので，$a_n = 1000$とすると，

$$\frac{11}{36}n - 3 < 1000 < \frac{11}{36}n + 2.$$

1 (つづき 2)

$$\frac{35928}{11} < n < \frac{36108}{11}.$$

このとき，$a_{3277} = 1001$，$a_{3276} = 1001$，$a_{3275} = 1000$ であり，a_n は n に関して増加するので，$a_n = 1000$ を満たす最大の n は

$$3275$$

である．

((2) の別解終り)

1　(つづき 3)

(3)　$y = g^{-1}(x)$ とおく．逆関数の定義より

$$x = g(y) = y^3 + y.$$

両辺を x で微分すると，合成関数の微分の公式より，

$$1 = 3y^2y' + y' \iff y' = \frac{1}{3y^2+1}.$$

よって，与式

$$t^2x^2 - f(y) \qquad \cdots ①$$

を x で微分すると，

$$2t^2x - f'(y)y' = 2t^2x - \frac{f'(y)}{3y^2+1}. \qquad \cdots ②$$

① が $x = t^3 + t$ で極値をとるから，$x = t^3 + t$ のとき ② の値は 0 となる．逆関数の定義より

$$t = g^{-1}(g(t)) = g^{-1}(t^3 + t)$$

であるから，$x = t^3 + t$ のときの $y = g^{-1}(x)$ の値は t となる．よって，

$$② = 2t^2(t^3+t) - \frac{f'(t)}{3t^2+1} = 0.$$

分母を払って整理すると，

$$f'(t) = 2t^2(t^3+t)(3t^2+1) = \boxed{6t^7 + 8t^5 + 2t^3}. \qquad \cdots \textbf{(オ)(答)}$$

$$f(1) - f(0) = \int_0^1 f'(t)\,dt = \int_0^1 (6t^7 + 8t^5 + 2t^3)dt = \frac{3}{4} + \frac{4}{3} + \frac{1}{2} = 2 + \frac{7}{12}.$$

よって，

$$f(1) = 2 + \frac{7}{12} + f(0) = \boxed{\frac{7}{12}}. \qquad \cdots \textbf{(カ)(答)}$$

(オ) の別解　$g(u) = u^3 + u$ は $g'(u) = 3u^2 + 1 > 0$ より単調増加である．よって，$g^{-1}(x)$ も単調増加なので，x の関数 ① が $x = t^3 + t$ で極値をとることと，y の関数とみた

$$① = t^2(y^3+y)^2 - f(y) \qquad \cdots ③$$

が $y = t$ で極値をとることは同値である．③ を y で微分して，

$$2t^2(y^3+y)(3y^2+1) - f'(y). \qquad \cdots ④$$

これが $y = t$ で極値をとることから，

$$2t^2(t^3+t)(3t^2+1) - f'(t) = 0$$

より

$$f'(t) = 2t^2(t^3+t)(3t^2+1) = 6t^7 + 8t^5 + 2t^3.$$

((オ) の別解終り)

1 (つづき 4)

(カ) の補足　(カ) における条件下で, ④ は

$$2t^2(y^3+y)(3y^2+1)-2y^2(y^3+y)(3y^2+1)=-2(y+t)(y-t)y(y^2+1)(3y^2+1)$$

となるので, ③ の増減表は $t>0$ のとき次のようになり $y=t$ で極値を持つ. $t=0, t<0$ の場合も同様.

y	$\cdots$	$-t$	$\cdots$	0	$\cdots$	t	$\cdots$
④	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
③	↗	極大	↘	極小	↗	極大	↘

2　C上の点 $\left(a, \frac{1}{a-4}\right)$ における接線の方程式は，$y'=-\frac{1}{(x-4)^2}$ より

$$y=-\frac{1}{(a-4)^2}(x-a)+\frac{1}{a-4}\quad \cdots (*)$$

(1) 曲線Cの接線で点Qを通るものが存在すると仮定する。

(*)は点Q(1, −1)を通るので

$$-1=-\frac{1}{(a-4)^2}(1-a)+\frac{1}{a-4}$$

$$-(a-4)^2=(a-1)+(a-4)$$

$$a^2-6a+11=0$$

しかし、判別式 $=(-6)^2-44=-8<0$ で実数 a は存在せず接点が存在しない。よって仮定は誤りである。

したがって、曲線Cの接線で点Qを通るものは存在しない。(証明終り)

(2) (*)が点P(1, 1)を通るので

$$1=-\frac{1}{(a-4)^2}(1-a)+\frac{1}{a-4}$$

$$a^2-10a+21=0$$

$(a-3)(a-7)=0$　　$a>4$ より　$a=7$

したがってこれを(*)に戻せば l の方程式は $\boxed{y=-\frac{1}{9}x+\frac{10}{9}}$ $\cdots$ (キ)

またそのときの接点Aは $\boxed{\left(7, \frac{1}{3}\right)}$ $\cdots$ (ク)

$$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AQ}=-\frac{2}{3}$$

$$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{PA})+(\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA})\cdot(\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{PA})=-\frac{2}{3}$$

$$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PQ}-|\overrightarrow{PA}|^2+\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PQ}+|\overrightarrow{PA}|^2=-\frac{2}{3}$$

$$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PQ}=-\frac{2}{3}$$

2 (2) つづき

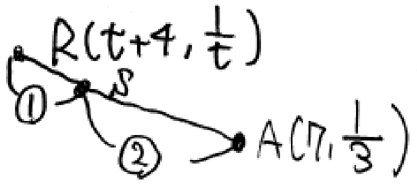
ここで $B\left(s,\ \frac{1}{s-4}\right)$ とすると　$\overrightarrow{PB}=\begin{pmatrix} s-1 \\ \frac{1}{s-4}-1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{PQ}=\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

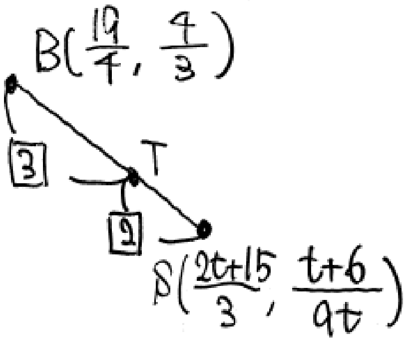
よって

$$\begin{pmatrix} s-1 \\ \frac{1}{s-4}-1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}=-\frac{2}{3} \Leftrightarrow -2\left(\frac{1}{s-4}-1\right)=-\frac{2}{3} \Leftrightarrow s=\frac{19}{4}$$

したがって　B $\boxed{\left(\frac{19}{4},\ \frac{4}{3}\right)}$ …(ケ)

(3)





$$S\left(\frac{7+2(t+4)}{3},\ \frac{\frac{1}{3}+\frac{2}{t}}{3}\right)$$

$$S\left(\frac{2t+15}{3},\ \frac{t+6}{9t}\right)$$

$$T\left(\frac{\frac{19}{2}+(2t+15)}{5},\ \frac{\frac{8}{3}+\frac{t+6}{3t}}{5}\right)$$

$$T\left(\frac{4t+49}{10},\ \frac{3t+2}{5t}\right)$$

したがって　$u=\boxed{\frac{4t+49}{10}}$ …(コ)

$$uv=\left(\frac{4t+49}{10}\right)\times\left(\frac{3t+2}{5t}\right)=\frac{12t^2+155t+98}{50t}=\frac{12t+\frac{98}{t}+155}{50}$$

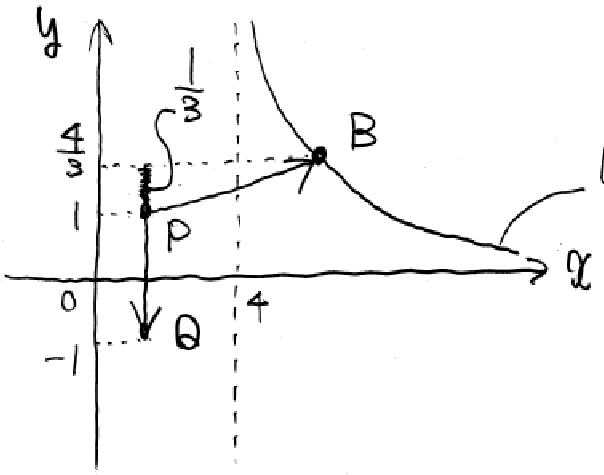
分子に注目する。$t>0$ より 相加平均・相乗平均の不等式により

$12t+\frac{98}{t}\geqq 2\sqrt{12t\cdot\frac{98}{t}}$ が成立し、等号が成立するときに最小値をとるので

$12t=\frac{98}{t} \Leftrightarrow t^2=\frac{49}{6}$　$t>0$ より　$t=\boxed{\frac{7}{\sqrt{6}}}$ …(サ)

2 (2) Bの座標を求める別解

$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PQ}=-\frac{2}{3}$ は $\overrightarrow{PB}$ の y 軸への正射影の長さが $\frac{1}{3}$ であることを表している。($\because |\overrightarrow{PQ}|=2$)



よって B の y 座標 $=\frac{4}{3}$ とわかるので　B$\boxed{\left(\frac{19}{4}, \frac{4}{3}\right)}$ …(ケ)

3

さいころを投げて 1, 3 の目が出たときは，P, Q を動かさないものと考える．

さいころを 1 回投げたとき，3 つの事象 A, B, C を

A : 点 P のみ正の向きに 1 だけ動く $\left(2, 4 \text{ の目が出る．確率 } \frac{1}{3}\right)$

B : 点 P，Q の座標の差が変わらない $\left(1, 3, 6 \text{ の目が出る．確率 } \frac{1}{2}\right)$

C : 点 Q のみ正の向きに 1 だけ動く $\left(5 \text{ の目が出る．確率 } \frac{1}{6}\right)$

により定める．

(1)　さいころを 2 回投げて，P と Q の距離が 2 となるのは

1 回目，2 回目ともに A が起こる

1 回目，2 回目ともに C が起こる

のいずれかの場合であり，その確率は

$$p_2 = \frac{1}{9} + \frac{1}{36} = \boxed{\frac{5}{36}} \qquad \cdots (シ)$$

(2)　さいころを $n+1$ 回投げ終えて，P と Q が同じ位置にあるのは

n 回目を終えて P の座標が Q より 1 大きく，つぎに C が起こる

n 回目を終えて P と Q が同じ位置にあり，つぎに B が起こる

n 回目を終えて P の座標が Q より 1 小さく，つぎに A が起こる

のいずれかの場合であるから

$$y_{n+1} = \boxed{\frac{1}{6}} x_n + \boxed{\frac{1}{2}} y_n + \boxed{\frac{1}{3}} z_n \qquad \cdots ① \ (ス),(セ),(ソ)$$
$$(n = 1, 2, 3, \cdots)$$

さいころを $n+1$ 回投げ終えて，P の座標が Q より 1 大きいのは

n 回目を終えて P の座標が Q より 1 大きく，つぎに B が起こる

n 回目を終えて P と Q が同じ位置にあり，つぎに A が起こる

のいずれかの場合であるから

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} x_n + \frac{1}{3} y_n \qquad \cdots ②$$

同様に

$$z_{n+1} = \frac{1}{6} y_n + \frac{1}{2} z_n \qquad \cdots ③$$

② $-2\times$ ③ をつくると

$$x_{n+1} - 2z_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n - 2z_n)$$

したがって，数列 $\{x_n - 2z_n\}$ は等比数列となる．

$x_1 = \frac{1}{3}, z_1 = \frac{1}{6}$ から $x_1 - 2z_1 = 0$ を得るので $x_n - 2z_n = 0$ となり

$$x_n = \boxed{2} z_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \qquad \cdots (タ)$$

3 (つづき)

(３)　① に $x_n=2\,z_n$ を代入した式と ③ をならべると

$$z_{n+1}=\frac{1}{6}y_n+\frac{1}{2}z_n$$
$$y_{n+1}=\frac{1}{2}y_n+\frac{2}{3}z_n$$

この２式で上の式に下の式の α 倍を加えると

$$z_{n+1}+\alpha y_{n+1}=\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\alpha\right)z_n+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\alpha\right)y_n$$

この右辺が $\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\alpha\right)(z_n+\alpha y_n)$ となるとすると，y_n の係数に関して

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\alpha=\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\alpha\right)\alpha$$

$\alpha^2=\frac{1}{4}$ となって $\alpha=\pm\frac{1}{2}$

$\beta=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\alpha$ と合わせて

$$(\alpha,\beta)=\boxed{\left(\frac{1}{2},\ \frac{5}{6}\right)},\quad\boxed{\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{6}\right)}\qquad\cdots(チ),(ツ)$$

(４)　(３) の結果から，すべての自然数 n に対して

$$z_{n+1}+\frac{1}{2}y_{n+1}=\frac{5}{6}\left(z_n+\frac{1}{2}y_n\right)$$
$$z_{n+1}-\frac{1}{2}y_{n+1}=\frac{1}{6}\left(z_n-\frac{1}{2}y_n\right)$$

したがって，２つの数列 $\left\{z_n+\frac{y_n}{2}\right\}$，$\left\{z_n-\frac{y_n}{2}\right\}$ はそれぞれ公比が $\frac{5}{6}$，$\frac{1}{6}$ の等比数列となる．$z_1=\frac{1}{6}$，$y_1=\frac{1}{2}$ であるので

$$z_n+\frac{y_n}{2}=\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\left(z_1+\frac{y_1}{2}\right)=\frac{5}{12}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^{n}$$
$$z_n-\frac{y_n}{2}=\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}\left(z_1-\frac{y_1}{2}\right)=-\frac{1}{12}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^{n}$$

この２式を加えて２で割ると

$$z_n=\frac{1}{4}\left(\frac{5}{6}\right)^{n}-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^{n}\quad(n=1,2,3,\cdots)$$

n 回目 $(n=2,3,\cdots)$ に P と Q の距離が２となるのは

$n-1$ 回目を終えて P の座標が Q より１大きく，つぎに A が起こる

$n-1$ 回目を終えて P の座標が Q より１小さく，つぎに C が起こる

のいずれかの場合であるから，その確率は

$$p_n=\frac{1}{3}x_{n-1}+\frac{1}{6}z_{n-1}=\frac{5}{6}z_{n-1}$$
$$=\frac{5}{24}\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}\right\}$$

$p_1=0$ と合わせて

$$p_n=\boxed{\frac{1}{4}\left(\frac{5}{6}\right)^{n}-\frac{5}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^{n}}\qquad\cdots(テ)$$

$(n=1,2,3,\cdots)$

4

(1)

$$I_n = \int_1^n \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}} dx$$
$$= \left[-\frac{2}{\sqrt{x}}\right]_1^n$$
$$= -\frac{2}{\sqrt{n}} + 2$$

より，

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \boxed{2}. \qquad \cdots(ト)(答)$$

(2)(証明)

$k-1 \leqq x \leqq k$　(k は 3 以上の整数) において，$\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{3}{2}} \leqq \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}}$ が成り立つから，

$$\int_{k-1}^k \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{3}{2}} dx \leqq \int_{k-1}^k \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}} dx$$

すなわち，

$$\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{3}{2}} \leqq \int_{k-1}^k \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}} dx$$

が成り立つので，$n \geqq 3$ のとき，

$$S_n = \left(\frac{1}{1}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} + \sum_{k=3}^n \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{3}{2}}$$
$$\leqq \left(\frac{1}{1}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} + \sum_{k=3}^n \left\{\int_{k-1}^k \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}} dx\right\}$$
$$= \left(\frac{1}{1}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} + \int_2^n \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}} dx$$
$$= 1 + \frac{\sqrt{2}}{4} + \left[-\frac{2}{\sqrt{x}}\right]_2^n$$
$$= 1 + \frac{5\sqrt{2}}{4} - \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

このことと $S_1 = 1$，$S_2 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{4}$ より，すべての n に対して $S_n < 1 + \frac{5\sqrt{2}}{4}$ が成り立つ．

(証明終り)

4 (つづき 1)

(3)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 5x\ dx = \left[\frac{x}{5}\sin 5x + \frac{1}{25}\cos 5x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \boxed{\frac{\pi}{10} - \frac{1}{25}}.$$

$\cdots$(ナ)(答)

(4)

$$\int_0^{2\pi} |\sin kx|\ dx = \sum_{l=1}^{2k}\left(\int_{\frac{l-1}{k}\pi}^{\frac{l}{k}\pi} |\sin kx|\ dx\right)$$

$$= \sum_{l=1}^{2k}\left\{\int_{\frac{l-1}{k}\pi}^{\frac{l}{k}\pi} (-1)^{l-1}\sin kx\ dx\right\}$$

$$= \sum_{l=1}^{2k}\left\{\left[\frac{(-1)^l}{k}\cos kx\right]_{\frac{l-1}{k}\pi}^{\frac{l}{k}\pi}\right\}$$

$$= \sum_{l=1}^{2k}\left[\frac{(-1)^l}{k}\cos l\pi - \left\{\frac{(-1)^l}{k}\cos(l-1)\pi\right\}\right]$$

$$= \sum_{l=1}^{2k}\left[\frac{(-1)^l}{k}\cdot(-1)^l - \left\{\frac{(-1)^l}{k}\cdot(-1)^{l-1}\right\}\right]$$

$$= \sum_{l=1}^{2k}\frac{2}{k}$$

$$= 2k\cdot\frac{2}{k}$$

$$= \boxed{4}.$$

$\cdots$(ニ)(答)

4 (つづき 2)

(5)(証明)

$$\begin{aligned}
|a_k| &= \left|\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\ dx\right| \\
&= \left|\left[f(x)\cdot\frac{1}{k}\sin kx\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} f'(x)\cdot\frac{1}{k}\sin kx\ dx\right| \\
&= \frac{1}{k}\left|\int_0^{2\pi} f'(x)\sin kx\ dx\right| \\
&\leqq \frac{1}{k}\int_0^{2\pi} |f'(x)\sin kx|\ dx \\
&= \frac{1}{k}\int_0^{2\pi} |f'(x)||\sin kx|\ dx.
\end{aligned}$$

ここで，$|f'(x)| \leqq M$ より，$0 \leqq x \leqq 2\pi$ において $|f'(x)||\sin kx| \leqq M|\sin kx|$ が成り立つので，

$$\int_0^{2\pi} |f'(x)||\sin kx|\ dx \leqq \int_0^{2\pi} M|\sin kx|\ dx$$

となるから，

$$\begin{aligned}
|a_k| &\leqq \frac{1}{k}\int_0^{2\pi} M|\sin kx|\ dx \\
&= \frac{4M}{k}.
\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}
T_n &\leqq \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{4M}{k}\right)^{\frac{3}{2}} \\
&= 8M^{\frac{3}{2}}S_n \\
&< 8M^{\frac{3}{2}}\left(1+\frac{5\sqrt{2}}{4}\right) \\
&< 8M^{\frac{3}{2}}\left(1+\frac{5}{4}\cdot\frac{3}{2}\right)
\end{aligned}$$

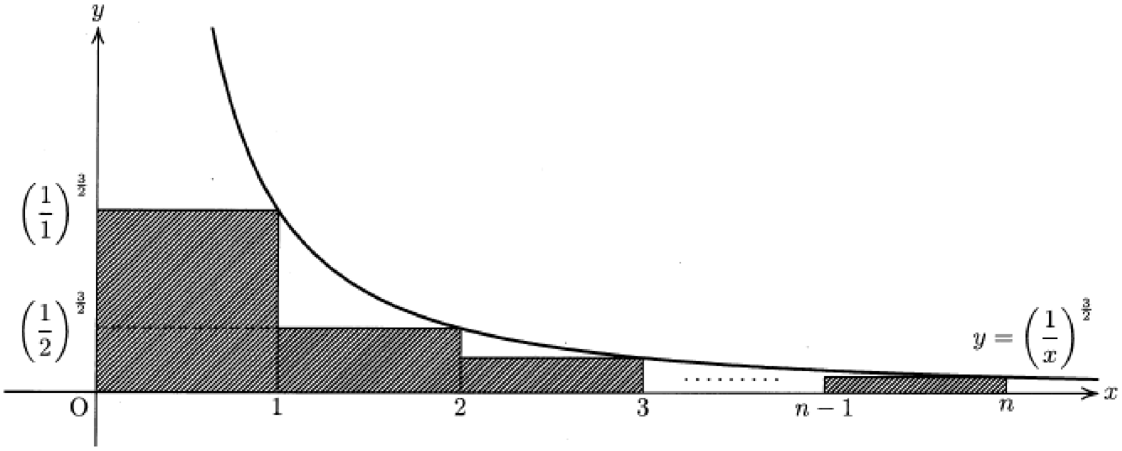
となるから，$T_n < 23M^{\frac{3}{2}}$ が成り立つ．

(証明終り)

4 (つづき 3)

【(2) の補足】

$n \geqq 3$ のとき，S_n は次の図の斜線部分の面積を表す．

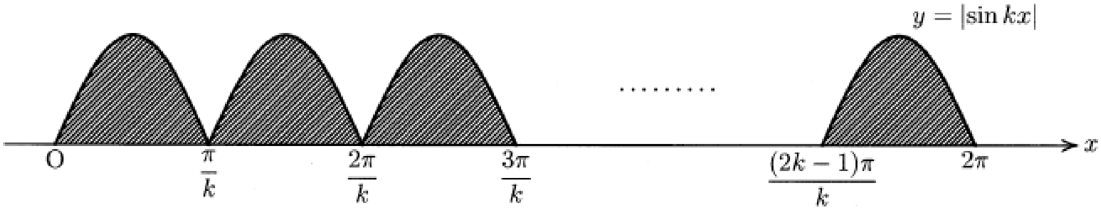


このことからも，$n \geqq 3$ のとき，$S_n < 1\cdot\left(\frac{1}{1}\right)^{\frac{3}{2}} + 1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} + \int_2^n \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}}\,dx$ が成り立つことがわかる．

((2) の補足終り)

【(4) の補足 1】

$\int_0^{2\pi} |\sin kx|\,dx$ は次の図の斜線部分の面積を表している．



このことに着目すると，

$$\int_0^{2\pi} |\sin kx|\,dx = 2k\int_0^{\frac{\pi}{k}} \sin kx dx$$

となることがわかる．

このことを利用して $\int_0^{2\pi} |\sin kx|\,dx$ の値を求めることもできる．

((4) の補足 1 終り)

4 (つづき 4)

【(4) の補足 2】

$\displaystyle\int_0^{2\pi} |\sin kx|\ dx$ は次のように計算することもできる．

$x = \dfrac{t}{k}$ とおくと，

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} |\sin kx|\ dx &= \int_0^{2k\pi} |\sin t| \cdot \frac{1}{k}\ dt \\ &= \sum_{l=1}^{2k} \left(\frac{1}{k} \int_{(l-1)\pi}^{l\pi} |\sin t|\ dt \right).\end{aligned}$$

$\displaystyle\int_{(l-1)\pi}^{l\pi} |\sin t|\ dt$ について，$t = u + (l-1)\pi$ とおくと，

$$\begin{aligned}\int_{(l-1)\pi}^{l\pi} |\sin t|\ dt &= \int_0^{\pi} |\sin\{u + (l-1)\pi\}|\ du \\ &= \int_0^{\pi} |\sin u|\ du \\ &= \int_0^{\pi} \sin u\ du \\ &= \Big[-\cos u\Big]_0^{\pi} \\ &= 2.\end{aligned}$$

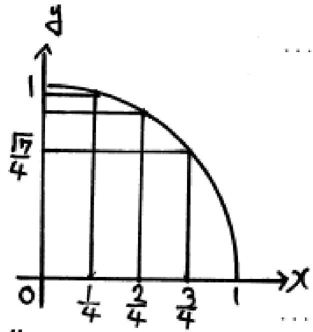
以上より，

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} |\sin kx|\ dx &= \sum_{l=1}^{2k} \left(\frac{1}{k} \cdot 2 \right) \\ &= 2k \cdot \left(\frac{1}{k} \cdot 2 \right) \\ &= 4.\end{aligned}$$

((4) の補足 2 終り)

5

線分 AB と線分 BC の長さが等しくなる x の値は，$x = \boxed{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$ …(ヌ)(答)



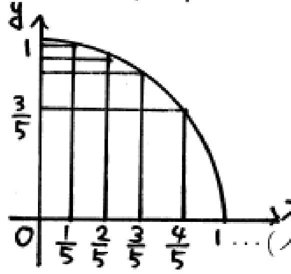
$n = 4$ のとき，右図のようになるので，

$$L_4(1) = \frac{1}{4},\ L_4(2) = \frac{1}{2},\ L_4(3) = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

よって，$L_4(k)$ $(k = 1, 2, 3)$ の最大値は，

$$\boxed{\frac{\sqrt{7}}{4}}$$

…(ネ)(答)

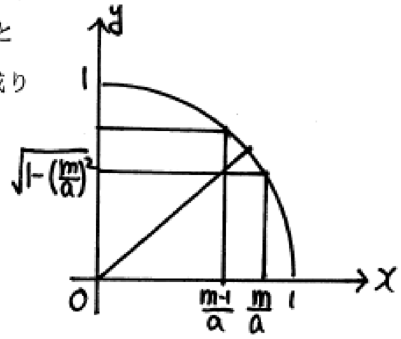


$n = 5$ のとき，右図のようになるので，

$$L_5(1) = \frac{1}{5},\ L_5(2) = \frac{2}{5},\ L_5(3) = \frac{3}{5},\ L_5(4) = \frac{3}{5}$$

よって，$L_5(k)$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ が最大となる k の値は，

$\boxed{3}$ と $\boxed{4}$ …(ノ)(ハ)(答)



2 以上の整数 a で，$L_a(k)$ が最大となる k の値が 2 個あるとき，そのような k のうち大きい方の値を m とおくと，$L_a(k)$ が最大となる k の値は $m-1$ と m であるから，$L_a(m-1) = L_a(m)$ が成り立つ．

このとき，右図のようになるので，

$$\frac{m-1}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{m}{a}\right)^2}$$

$$\frac{m^2 - 2m + 1}{a^2} = 1 - \left(\frac{m}{a}\right)^2$$

$$2m^2 - 2m - a^2 + 1 = 0 \quad \cdots ①$$

$$m = \frac{1 \pm \sqrt{2a^2 - 1}}{2}$$

$m > 0$ より，$m = \boxed{\dfrac{1 + \sqrt{2a^2 - 1}}{2}}$ …(ヒ)(答)

また，$b = 3a + 4m - 2$ とおいたとき，$L_b(k)$ が最大となる k の値が 2 個あり，それらの大きい方を l とすると，同様に，

$$l = \frac{1 + \sqrt{2b^2 - 1}}{2}$$

ここで，①より

$$a^2 = 2m^2 - 2m + 1$$

5 (つづき)

このとき，

$$
\begin{aligned}
2b^2-1 &= 2(3a+4m-2)^2-1 \\
&= 2(9a^2+16m^2+4+24am-16m-12a)-1 \\
&= 18a^2+32m^2+8+48am-32m-24a-1 \\
&= 16a^2+2a^2+32m^2+7+48am-32m-24a \\
&= 16a^2+2(2m^2-2m+1)+32m^2+7+48am-32m-24a \\
&= 16a^2+36m^2+9+48am-36m-24a \\
&= (4a+6m-3)^2
\end{aligned}
$$

より，

$$
l=\frac{1+\sqrt{(4a+6m-3)^2}}{2}=\boxed{2a+3m-1} \qquad \cdots(フ)(答)
$$