数学

Ⅰ.

(i) 5 個の値の平均値は, $\dfrac{25+13+19+c+31}{5}=\dfrac{88+c}{5}$.

これが $c+4$ に等しいというので, $\dfrac{88+c}{5}=c+4$.

よって, $c=\underline{17.}$ $\cdots$ (1) (2) (答)

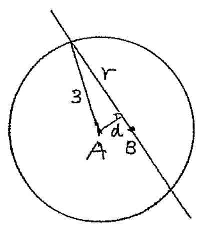
このとき平均値は 21 なので, 分散は,

$$\frac{4^2+8^2+2^2+4^2+10^2}{5}=\underline{40}.\quad\cdots (3)\ (4)\ (答)$$

(ii) 点 B を含む平面を α とし, 点 A と α との距離を d とする.

中心が A で半径 3 の球と α との交円の半径 r は,

$$r=\sqrt{3^2-d^2}\ .$$



$0\leqq d\leqq 1$ なので, r は

$d=0$ のとき最大値 $\underline{3.}$ $\cdots$ (5) (答)

$d=1$ のとき, 最小値 $\underline{2\sqrt{2}}$ $\cdots$(6)(7) (答)

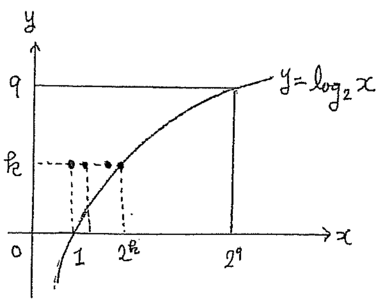
をとる.

(iii) $y=k$ $(k=1, 2, .., 9)$ に対して, $\log_2 x\leqq k$ を満たす正の整数は,

$1, 2, \ldots, 2^k$ の 2^k 個ある.

よって, 求める組の個数は,

$$2^1+2^2+\ldots+2^9=2\cdot\frac{2^9-1}{2-1}=2^{10}-2=\underline{1022}.\quad\cdots (8)\ \sim(11)\ (答)$$



I.　(つづき)

(iv) $f(\theta)=\left|\int_0^1 (x+\sin\theta)dx\right|=\left|\left[\frac{1}{2}x^2+(\sin\theta)x\right]_0^1\right|$

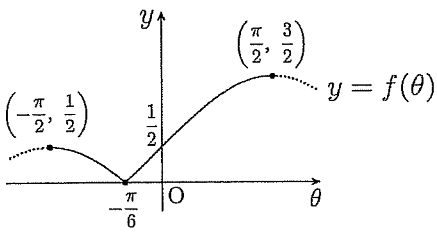
$$=\left|\frac{1}{2}+\sin\theta\right|$$

なので,

$-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq-\frac{\pi}{6}$ のとき, $f(\theta)=-\frac{1}{2}-\sin\theta$,

$-\frac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ のとき, $f(\theta)=\frac{1}{2}+\sin\theta$.

よって, $-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ での $y=f(\theta)$ のグラフは次のようになる.

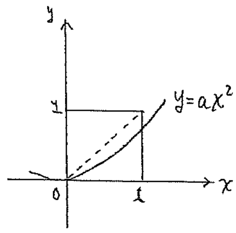


したがって, $\theta=\underline{\frac{-1}{6}}\pi$ のとき最小値 $\underline{0}$　…(12)〜(15) (答)

$\theta=\underline{\frac{1}{2}}\pi$ のとき最大値 $\underline{\frac{3}{2}}$　…(16)〜(19) (答)

をとる.

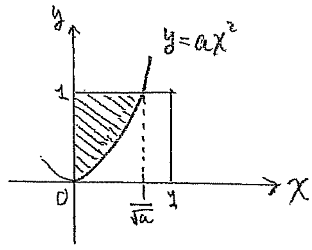
(v)



$0<a\leqq 1$ のとき, 図より, 正方形のうち

$y\leqq ax^2$の部分の面積は $\frac{1}{2}$ 未満になる.

$a>1$ のとき, 図の斜線部の面積が $\frac{1}{2}$ になればよい.



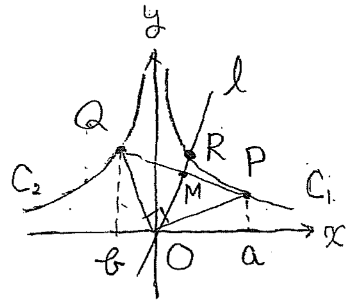
図の斜線部の面積は

$$\frac{1}{\sqrt{a}}-\int_0^{\frac{1}{\sqrt{a}}} ax^2dx=\left[x-\frac{a}{3}x^3\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{2}{3\sqrt{a}}$$

となるので, 条件は $\frac{2}{3\sqrt{a}}=\frac{1}{2}$.

$a=\underline{\frac{16}{9}}$.　…(20)〜(22) (答)

Ⅱ.



(i) PはC₁上より　$P\left(a, \frac{1}{a}\right)$と表せる. $(a>0)$

QはC₂上より　$Q\left(b, -\frac{1}{b}\right)$と表せる. $(b<0)$

OPの傾きは $\frac{\frac{1}{a}}{a}=\frac{1}{a^2}$, OQの傾きは $\frac{-\frac{1}{b}}{b}=-\frac{1}{b^2}$ であり

OP⊥OQ から $\frac{1}{a^2}\times\left(-\frac{1}{b^2}\right)=-1$. すなわち $(ab)^2=1$.

これと $a>0$, $b<0$ から $ab=-1$. よって $b=-\frac{1}{a}$ であり $Q\left(-\frac{1}{a}, a\right)$

$OP=OQ=\sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}}$, $\angle POQ=90^\circ$ より, $\triangle OPQ=\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}}\right)^2=\underline{\frac{1}{2}\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)}$ …(ア)(答)

また, 線分PQの中点Mの座標は $\left(\frac{a-\frac{1}{a}}{2}, \frac{a+\frac{1}{a}}{2}\right)$ である.

PQ∦x軸のとき, (Pのy座標)≠(Qのy座標)より $\frac{1}{a}\neq a$, すなわち $a\neq 1$ であり

lの傾きは $\frac{\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)}{\frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{a}\right)}=\underline{\frac{a^2+1}{a^2-1}}$ …(イ)(答)

(ii) $l: y=\frac{a^2+1}{a^2-1}x$ と $C_1: y=\frac{1}{x}\ (x>0)$ より　$\frac{a^2+1}{a^2-1}x=\frac{1}{x}$,　$x^2=\frac{a^2-1}{a^2+1}\ (x>0)$

よってRのx座標は $\underline{\sqrt{\frac{a^2-1}{a^2+1}}}$ …(ウ)(答)

$(\text{OPの傾き})=\frac{1}{a^2}=\tan 15^\circ=\tan(60^\circ-45^\circ)=\frac{\tan 60^\circ-\tan 45^\circ}{1+\tan 60^\circ\tan 45^\circ}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

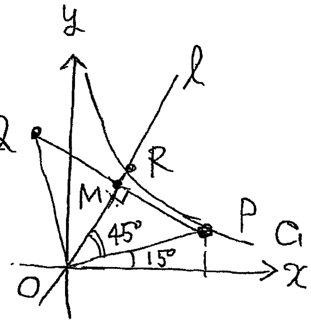
より $a^2=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=2+\sqrt{3}$.

このときのRのx座標は

$$\sqrt{\frac{(2+\sqrt{3})-1}{(2+\sqrt{3})+1}}=\sqrt{\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}(1+\sqrt{3})}}=\sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}}}=\underline{3^{-\frac{1}{4}}}$$ …(エ)(答)

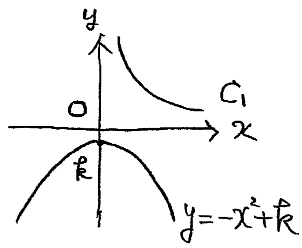
Ⅱ.

(ii)(つづき) (エ)の別解



$\triangle OPQ$は$\angle O=90°$の直角二等辺三角形であるから, $\angle POM=45°$であり,
lとx軸の正の方向のなす角は
$15°+45°=60°$
である. よってlの傾きは$\tan 60°=\sqrt{3}$.
$l: y=\sqrt{3}x$と$C_1: y=\dfrac{1}{x}\ (x>0)$から　$x^2=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. よって$x=\underline{3^{-\frac{1}{4}}}$

(iii) $k\leqq 0$のとき, 放物線$y=-x^2+k$とC_1は共有点をもたないので, $k>0$で考える.



$y=-x^2+k$と$y=\dfrac{1}{x}$から　$-x^2+k=\dfrac{1}{x}$
これを変形して　$x^3-kx+1=0$
$f(x)=x^3-kx+1$とおく.
$y=f(x)$のグラフとx軸が, $x>0$において共有点を1つだけもつようなkの値を求める
$f'(x)=3x^2-k=3\left(x+\sqrt{\dfrac{k}{3}}\right)\left(x-\sqrt{\dfrac{k}{3}}\right)$

x	(0)	$\cdots$	$\sqrt{\frac{k}{3}}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	1	↘		↗

$f\left(\sqrt{\dfrac{k}{3}}\right)=0$を満たす$k$の値を求める

$$f\left(\sqrt{\frac{k}{3}}\right)=\frac{k}{3}\sqrt{\frac{k}{3}}-k\sqrt{\frac{k}{3}}+1=-\frac{2k}{3}\sqrt{\frac{k}{3}}+1=-2\left(\frac{k}{3}\right)^{\frac{3}{2}}+1$$

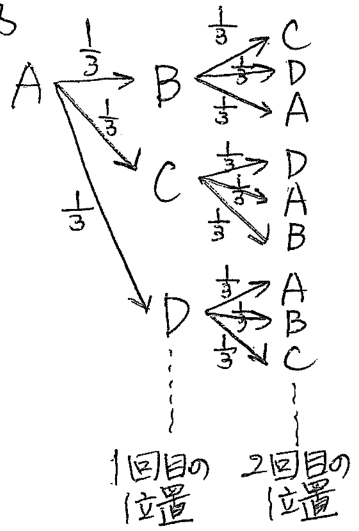
より. $\left(\dfrac{k}{3}\right)^{\frac{3}{2}}=\dfrac{1}{2}$から　$\dfrac{k}{3}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$

よって　$k=\underline{2^{-\frac{2}{3}}\cdot 3}$　　…(オ)(答)

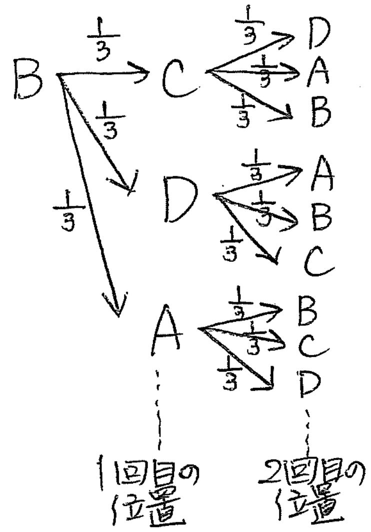
Ⅲ.

1回の移動で1マス，2マス，3マス進む確率はどれも$\frac{1}{3}$.

(i) 太郎



花子



1回目の位置が同じになる確率は，

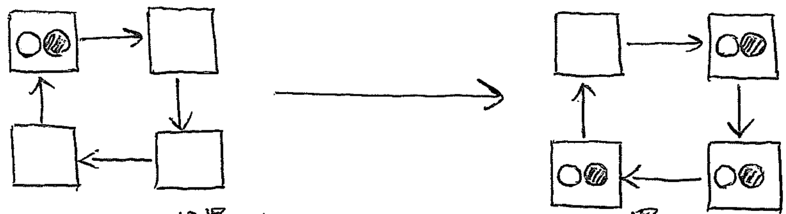
$$\underbrace{\underbrace{\frac{1}{3}}_{太郎}\times\underbrace{\frac{1}{3}}_{花子}}_{Cで同じ位置}+\underbrace{\underbrace{\frac{1}{3}}_{太郎}\times\underbrace{\frac{1}{3}}_{花子}}_{Dで同じ位置}=\underline{\frac{2}{9}}.$$
……(23)(24)(答)

2回目の位置が同じになる確率は，

$$\underbrace{\underbrace{\frac{3}{9}}_{太郎}\times\underbrace{\frac{2}{9}}_{花子}}_{Aで同じ位置}+\underbrace{\underbrace{\frac{2}{9}}_{太郎}\times\underbrace{\frac{3}{9}}_{花子}}_{Bで同じ位置}+\underbrace{\underbrace{\frac{2}{9}}_{太郎}\times\underbrace{\frac{2}{9}}_{花子}}_{Cで同じ位置}+\underbrace{\underbrace{\frac{2}{9}}_{太郎}\times\underbrace{\frac{2}{9}}_{花子}}_{Dで同じ位置}$$

$$=\underline{\frac{20}{81}}.$$
……(25)(26)(27)(28)(答)

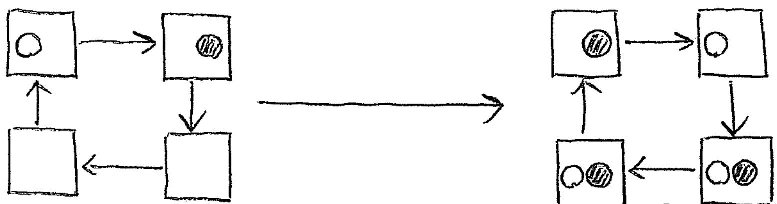
(ii) ○と◎は，どちらか一方が太郎で他方が花子を表す．
1回の移動における2人の相対的な位置を考えればよい．



2人のn回目の位置が同じ

$n+1$回目の位置が同じになる確率は

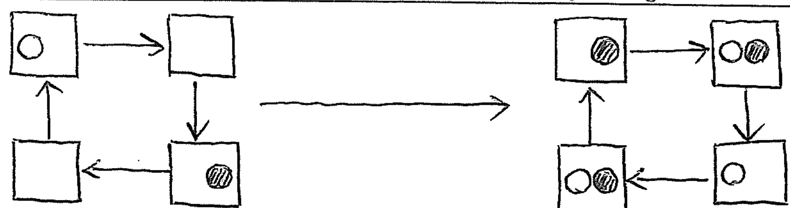
$$\left(\underset{○}{\frac{1}{3}}\times\underset{◎}{\frac{1}{3}}\right)\times 3=\frac{1}{3}.$$



2人のn回目の位置が「隣」

$n+1$回目の位置が同じになる確率は

$$\left(\underset{○}{\frac{1}{3}}\times\underset{◎}{\frac{1}{3}}\right)\times 2=\frac{2}{9}.$$



2人のn回目の位置が「対角線上」

$n+1$回目の位置が同じになる確率は

$$\left(\underset{○}{\frac{1}{3}}\times\underset{◎}{\frac{1}{3}}\right)\times 2=\frac{2}{9}.$$

したがって，$p_{n+1}=\frac{1}{3}p_n+\frac{2}{9}(1-p_n)$.

$$\therefore\ p_{n+1}=\underline{\frac{1}{9}p_n+\frac{2}{9}}.\quad\text{------}(29)(30)(31)(32)(答)$$

$$\therefore\ p_{n+1}-\frac{1}{4}=\frac{1}{9}\left(p_n-\frac{1}{4}\right).$$

よって，$p_n-\frac{1}{4}=\left(\frac{2}{9}-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}$.

$$\therefore\ p_n=\underline{\frac{1}{4}\left\{1-\left(\frac{1}{9}\right)^n\right\}}.\quad\text{----}(33)(34)(35)(36)(答)$$

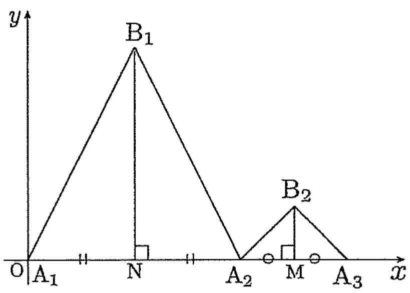
((参考) この式で$n=2$として，$p_2=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{81}\right)=\frac{20}{81}$とすることで，(i)の答を求めてもよい．)

IV. (i) 規則 (d) より，

$$\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{A}_{n+2}=\frac{1}{2}\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}. \qquad \cdots ①$$

これと規則 (e) より，

$$(\mathrm{B}_{n+1}\text{の } y \text{ 座標})=\frac{1}{4}(\mathrm{B}_n\text{の } y \text{ 座標}). \qquad \cdots ②$$



線分 $\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3$ の中点を M とすると，①，② より，

$$\mathrm{A}_2\mathrm{M}=\frac{1}{2}\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\right)=\frac{1}{4},$$
$$\mathrm{B}_2\mathrm{M}=(\mathrm{B}_2\text{の } y \text{ 座標})=\frac{1}{4}(\mathrm{B}_1\text{の } y \text{ 座標})=\frac{1}{4}$$

であり，$\triangle\mathrm{A}_2\mathrm{MB}_2$ は直角二等辺三角形であるから，

$$\cos\angle\mathrm{B}_2\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3=\cos\frac{\pi}{4}=\underline{\frac{\sqrt{2}}{2}}. \qquad \cdots (37)(38)(\text{答})$$

次に，線分 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$ の中点を N とすると，

$$\mathrm{A}_2\mathrm{N}=\frac{1}{2}\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2=\frac{1}{2},$$
$$\mathrm{B}_1\mathrm{N}=(\mathrm{B}_1\text{の } y \text{ 座標})=1,$$
$$\mathrm{B}_1\mathrm{A}_2=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

より，$\angle\mathrm{B}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_1=\alpha$ とすると，

$$\sin\alpha=\frac{\mathrm{B}_1\mathrm{N}}{\mathrm{B}_1\mathrm{A}_2}=\frac{2}{\sqrt{5}},\quad \cos\alpha=\frac{\mathrm{A}_2\mathrm{N}}{\mathrm{B}_1\mathrm{A}_2}=\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

よって，

$$\begin{aligned}\cos\angle\mathrm{B}_1\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2&=\cos(\angle\mathrm{B}_2\mathrm{A}_2\mathrm{A}_1-\alpha)\\&=\cos\left(\frac{3}{4}\pi-\alpha\right)\\&=\cos\frac{3}{4}\pi\cos\alpha+\sin\frac{3}{4}\pi\sin\alpha\\&=-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\\&=\underline{\frac{\sqrt{10}}{10}}.\end{aligned} \qquad \cdots (39)\sim(42)(\text{答})$$

IV. ＜(i) の (39)〜(42) の別解＞

$\overrightarrow{A_2B_1}=\left(-\frac{1}{2},\ 1\right)$, $\overrightarrow{A_2B_2}=\left(\frac{1}{4},\ \frac{1}{4}\right)$ より,

$$\left|\overrightarrow{A_2B_1}\right|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+1^2}=\frac{\sqrt{5}}{2},$$
$$\left|\overrightarrow{A_2B_2}\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{4},$$
$$\overrightarrow{A_2B_1}\cdot\overrightarrow{A_2B_2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$$

であるから,

$$\cos\angle B_1A_2B_2=\frac{\overrightarrow{A_2B_1}\cdot\overrightarrow{A_2B_2}}{\left|\overrightarrow{A_2B_1}\right|\left|\overrightarrow{A_2B_2}\right|}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}}=\frac{\sqrt{10}}{10}.$$

(ii) $A_1A_2=1$ と ① より,

$$A_nA_{n+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$n\geqq 2$ のとき, A_n の x 座標は,

$$(A_1\text{の }x\text{ 座標})+\sum_{k=1}^{n-1}A_kA_{k+1}$$
$$=0+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$
$$=\frac{1\cdot\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{1}{2}}$$
$$=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}.$$

($n=1$ のときも成り立つ)

よって,

$$\underline{A_n\left(2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2},\ 0\right).}\qquad\cdots(43)\sim(46)(\text{答})$$

Ⅳ. (iii) B_n の x 座標は線分 $\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}$ の中点の x 座標と等しいので,

$$\frac{1}{2}\left[\left\{2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right\}+\left\{2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}\right]=2-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

また, (B_1の y 座標) $=1$ と ② より, B_n の y 座標は,

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}.$$

よって,

$$\underline{\mathrm{B}_n\left(2-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},\ \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right)}.\qquad\cdots(47)\sim(53)(答)$$

(iv) $\mathrm{B}_n\ (X, Y)$ とすると,

$$\begin{cases} X=2-\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}, & \cdots③ \\ Y=\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}. & \cdots④ \end{cases}$$

③ より,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=-\frac{2}{3}(X-2)$$

これより, ④ は,

$$\begin{aligned} Y&=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}^2 \\ &=\left\{-\frac{2}{3}(X-2)\right\}^2 \\ &=\frac{4}{9}(X-2)^2 \\ &=\frac{4}{9}X^2-\frac{16}{9}X+\frac{16}{9}. \end{aligned}$$

よって, 点 B_1, B_2, B_3, $\cdots$ は

同一の放物線 $\underline{y=\frac{4}{9}x^2-\frac{16}{9}x+\frac{16}{9}}$ 上にある.　$\cdots(54)\sim(61)$ (答)