[1](1)

(a)

$$\begin{aligned}\triangle \mathrm{OAB} &= \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 5\sin\alpha \\ &= \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 5\cdot\frac{3}{5} \\ &= \frac{\boxed{1}\boxed{5}}{\boxed{2}} \qquad \cdots (1),(2),(3)(答)\end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}\mathbf{AB}^2 &= (5\cos\alpha-5)^2+(5\sin\alpha)^2 \\ &= 50-50\cos\alpha \\ &= 50-50\cdot\frac{4}{5} \\ &= 10\end{aligned}$$

$$\mathbf{AB}=\sqrt{\boxed{1}\boxed{0}} \qquad \cdots (4),(5)(答)$$

(b)

$$\begin{aligned}\triangle \mathrm{OBC} &= \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 5\sin 2\alpha \\ &= \frac{25}{2}\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha \\ &= \frac{25}{2}\cdot 2\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5} \\ &= \boxed{1}\boxed{2} \qquad \cdots (6),(7)(答)\end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}\mathbf{BC}^2 &= (5\cos 3\alpha-5\cos\alpha)^2+(5\sin 3\alpha-5\sin\alpha)^2 \\ &= 50-50(\cos 3\alpha\cos\alpha+\sin 3\alpha\sin\alpha) \\ &= 50-50\cos 2\alpha \\ &= 100\sin^2\alpha \\ &= 100\cdot(\frac{3}{5})^2 \\ &= 36\end{aligned}$$

$$\mathbf{BC}=\boxed{6} \qquad \cdots (8)(答)$$

[1](1)(つづき)

(c)

$$
\begin{aligned}
\mathbf{AC}^2 &= (5\cos 3\alpha - 5)^2 + (5\sin\alpha)^2 \\
&= 50 - 50\cos^3\alpha \\
&= 50(1 - \cos 3\alpha) \\
&= 50(1 - 4\cos^3\alpha + 3\cos\alpha) \\
&= 50\{1 - 4(\frac{4}{5})^3 + 3\cdot\frac{4}{5}\} \\
&= 50\cdot\frac{169}{125} \\
&= 10\cdot\frac{169}{25}
\end{aligned}
$$

$$
\mathbf{AC} = \frac{\boxed{1}\boxed{3}}{\boxed{5}}\sqrt{\boxed{1}\boxed{0}} \qquad \cdots(9)\sim(13)(\text{答})
$$

[1](2)

$$|m+n-6|+|m-n-2| \leqq 6 \quad \cdots ①$$

$(m+n-6)(m-n-2) \geqq 0$ のとき，① より

$$(m+n-6)+(m-n-2) \leqq 6 \text{ かつ } -(m+n-6)-(m-n-2) \leqq 6$$

$$\boxed{1} \leqq m \leqq \boxed{7} \qquad \cdots (14), (15)(答)$$

$(m+n-6)(m-n-2) \leqq 0$ のとき，① より

$$(m+n-6)-(m-n-2) \leqq 6 \text{ かつ } -(m+n-6)+(m-n-2) \leqq 6$$

$$\boxed{-}\boxed{1} \leqq n \leqq \boxed{5} \qquad \cdots (16), (17), (18)(答)$$

よって

$$\begin{aligned}(m-n)(m+n-6) &= m^2-6m-n^2+6n \\ &= (m-\boxed{3})^2-(n-\boxed{3})^2\end{aligned} \qquad \cdots (19), (20)(答)$$

上式は $m=7, n=3$ のときに最大となり，最大値は

$$(7-3)^2-(3-3)^2=\boxed{1}\boxed{6} \qquad \cdots (21), (22)(答)$$

〔2〕

(1) $T_1=\left(1-\frac{1}{2}\right)^2$ より,

$$\sum_{k=1}^{1}\frac{2}{3^k}\cdot\frac{(k+2)!}{(k-1)!}a_k=\frac{1}{4}$$

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{1}a_1=\frac{1}{4}$$

よって, $a_1=\dfrac{\boxed{1}}{\boxed{16}}$ ・・・(23)〜(25)（答）

同様に、$T_2=\left(2-\frac{1}{2}\right)^2$ より、

$$\sum_{k=1}^{2}\frac{2}{3^k}\cdot\frac{(k+2)!}{(k-1)!}a_k=\frac{9}{4}$$

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{1}\cdot\frac{1}{16}+\frac{2}{9}\cdot\frac{24}{1}a_2=\frac{9}{4}$$

よって $a_2=\dfrac{\boxed{3}}{\boxed{8}}$ ・・・(26),(27)（答）

(2) $n\geqq 2$ に対して,

$$T_n-T_{n-1}=\left(n-\frac{1}{2}\right)^2-\left(n-\frac{3}{2}\right)^2$$

$$=(2n-2)\cdot 1$$

$$=\boxed{2}n-\boxed{2}$$ ・・・(28),(29)（答）

よって $\dfrac{2}{3^n}\cdot\dfrac{(n+2)!}{(n-1)!}\cdot a_n=2n-2$

$$a_n=2(n-1)\cdot\frac{3^n}{2}\cdot\frac{1}{(n+2)(n+1)n}$$

$$a_n=3^n\cdot\frac{n-\boxed{1}}{n(n+1)(n+2)}$$ ・・・(30)（答）

よって, $r=\boxed{3}$, $s=\boxed{0}$, $t=\boxed{1}$, $u=\boxed{2}$ ・・・(31)〜(34)（答）

〔2〕（つづき）

(3) $k \geqq 2$ において，

$$a_k = 3^k \cdot \frac{(k+2)-3k}{k(k+1)(k+2)} \cdot \frac{1}{-2}$$

$$= -\frac{3^k}{2}\left\{\frac{1}{k(k+1)} - \frac{3}{(k+1)(k+2)}\right\}$$

$$= \frac{1}{\boxed{2}}\left\{\frac{3^{k+1}}{(k+1)(k+\boxed{2})} - \frac{3^k}{(k+1)(k+\boxed{0})}\right\}$$

・・・(35)～(37) (答)

ここで $b_k = \dfrac{3^k}{k(k+1)}$ $(k \geqq 2)$ とおくと，

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

$$= a_1 + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}(b_{k+1} - b_k)$$

$$= \frac{1}{16} + \frac{1}{2}(b_{n+1} - b_2)$$

$$= \frac{1}{16} + \frac{1}{2}\left\{\frac{3^{n+1}}{(n+1)(n+2)} - \frac{3^2}{2\cdot 3}\right\}$$

$$= -\frac{\boxed{1}\boxed{1}}{\boxed{1}\boxed{6}} + \frac{3^{n+1}}{\boxed{2}(n+1)(n+2)}$$ ・・・(38)～(42) (答)

これより，$p = \boxed{1}$，$q = \boxed{2}$ ・・・(43),(44) (答)

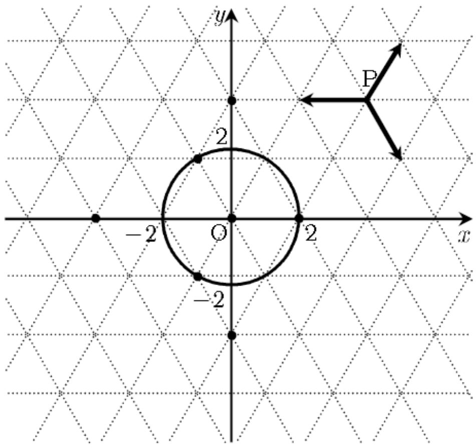
[3]　この試行を１回行い，

(A) が起こる確率は　$\dfrac{1}{2^2}=\dfrac{1}{4}$,

(B) が起こる確率は　$\dfrac{1}{2^2}=\dfrac{1}{4}$,

(C) が起こる確率は　$\dfrac{2}{2^2}=\dfrac{1}{2}$

である。



(1)　１回目の試行前に原点にある点 P が，３回目の試行後に原点にあるのは，(A)，(B)，(C) がそれぞれ１回ずつ起こる場合であるから，求める確率は

$$3!\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\boxed{3}}{\boxed{1}\boxed{6}}$$

… (45)，(46)，(47) (答)

(2)　１回目の試行前に原点にある点 P が，３回目の試行後に y 軸上にあるのは，

(A) または (B) が２回，(C) が１回起こる場合であるから，求める確率は

$${}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)^2\frac{1}{2}=\frac{\boxed{3}}{\boxed{8}}$$

… (48)，(49) (答)

(3)　１回目の試行前に原点にある点 P が，５回目の試行後に x 軸上にあるのは，

次の３つの場合である。

(ⅰ)　(C) が５回起こる

(ⅱ)　(A) が１回，(B) が１回，(C) が３回起こる

(ⅲ)　(A) が２回，(B) が２回，(C) が１回起こる

よって，求める確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5+\frac{5!}{3!}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{5!}{2!2!}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^2\frac{1}{2}=\frac{\boxed{6}\boxed{3}}{\boxed{2}\boxed{5}\boxed{6}}$$

… (50) ～ (54) (答)

[3] (つづき)

(4)　1回目の試行前に原点にある点Pが，

5回目の試行後に x 軸上にあるという事象を E，

8回目の試行後に円 $x^2+y^2=4$ 上にあるという事象を F

とする。

(3) から，事象 E が起こる確率 $P(E)$ は　$P(E)=\dfrac{63}{256}$

積事象 $E\cap F$ が起こるのは，次の2つの場合である。

(ｉ)　最初の5回で，(A) が1回，(B) が1回，(C) が3回起こり，

その後，「(A) が2回，(B) が1回」または「(A) が1回，(B) が2回」起こる

(ⅱ)　最初の5回で，(A) が2回，(B) が2回，(C) が1回起こり，

その後，「(A)，(B)，(C) が各1回」または「(A) または (B) が1回，(C) が2回」起こる

よって，$E\cap F$ が起こる確率 $P(E\cap F)$ は

$$P(E\cap F)$$
$$=\frac{5!}{3!}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\times 2\cdot{}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{4}\right)^2\frac{1}{4}+\frac{5!}{2!2!}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^2\frac{1}{2}\times\left\{3!\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+{}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}$$
$$=\frac{195}{2^{12}}$$

したがって，1回目の試行前に原点にある点Pが，5回目の試行後に x 軸上にあるとき，

8回目の試行後に円 $x^2+y^2=4$ 上にある条件付き確率 $P_E(F)$ は

$$P_E(F)=\frac{P(E\cap F)}{P(E)}=\frac{195}{2^{12}}\div\frac{63}{256}=\frac{\boxed{6}\boxed{5}}{\boxed{3}\boxed{3}\boxed{6}}$$　… (55) ～ (59) (答)

[4]

(1)　$y = -x^2 \quad \cdots$① より $y' = -2x$ であるから，接点 $(-p, -p^2)$ における ① の接線の方程式は

$$y = 2p(x+p) - p^2$$

すなわち

$$y = 2px + p^2 \quad \cdots ②$$

② で $y = 2m$ として

$$2px + p^2 = 2m$$
$$x = \frac{2m - p^2}{2p} \qquad \cdots(答)$$

(2)　$\dfrac{2m - p^2}{2p} \leqq 1$ より

$$2m - p^2 \leqq 2p$$
$$m \leqq \frac{1}{2}(p^2 + 2p)$$

であるから，$N = \left[\dfrac{1}{2}(p^2 + 2p)\right]$.

$N = 40$ より

$$40 \leqq \frac{1}{2}(p^2 + 2p) < 41$$

$$p^2 + 2p - 80 \geqq 0 \text{ かつ } p^2 + 2p - 82 < 0$$

これと $p > 0$ より

$$8 \leqq p < -1 + \sqrt{83} \qquad \cdots(答)$$

(3)

$$a = 3n\log_3 6 - \log_3 2 + n$$
$$= \log_3 \frac{6^{3n} \cdot 3^n}{2}$$
$$= \log_3 3^{4n} \cdot 2^{3n-1}$$

よって

$$3^a = 3^{4n} \cdot 2^{3n-1} \qquad \cdots(答)$$

[4] (つづき)

(4) $p = 3^a$ より

$$p = 3^{4n} \cdot 2^{3n-1}$$

このpは偶数であるから $N = \left[\frac{1}{2}(p^2 + 2p)\right] = \frac{1}{2}p^2 + p$.

$\frac{1}{2}p^2 < N < 2^{1000}$ より

$$\begin{aligned} &p^2 < 2^{1001} \\ &3^{8n} \cdot 2^{6n-2} < 2^{1001} \\ &\log_2 3^{8n} \cdot 2^{6n-2} < 1001 \\ &8n \log_2 3 + 6n - 2 < 1001 \\ &n < \frac{1003}{8\log_2 3 + 6} < \frac{1003}{8 \cdot 1.58 + 6} = 53.80\cdots \end{aligned}$$

よって，$n \leqq 53$ が必要.

次に，$n = 53$ のとき，$p = 3^{212} \cdot 2^{158}$ であり

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}p^2 = 3^{424} \cdot 2^{315} \\ &\log_2 \frac{1}{2}p^2 < 424 \log_2 3 + 315 < 424 \cdot 1.59 + 315 < 990 \\ &\frac{1}{2}p^2 < 2^{990} \end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned} &\log_2 p = 212 \log_2 3 + 158 < 212 \cdot 1.59 + 158 < 496 \\ &p < 2^{496} \end{aligned}$$

であるから

$$N = \frac{1}{2}p^2 + p < 2^{990} + 2^{496} < 2^{1000}$$

すなわち，$n = 53$ のとき確かに $N < 2^{1000}$ を満たす.

求める n の最大値は

$$53 \qquad \cdots(答)$$

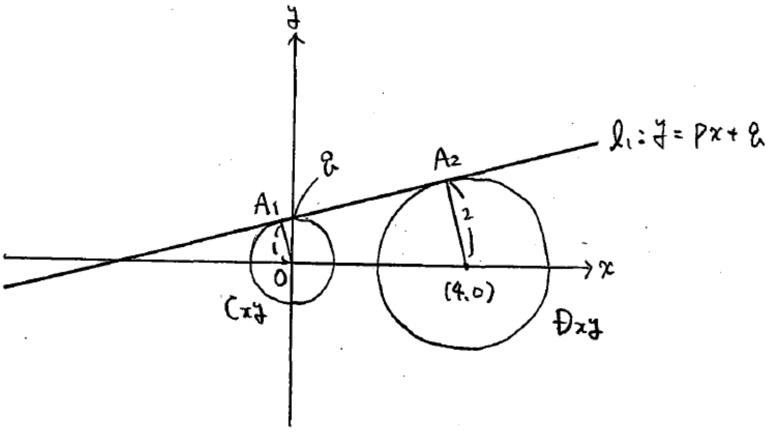
[5]

$$\begin{cases} C : x^2+y^2+z^2=1 \\ D : (x-4)^2+y^2+z^2=4 \end{cases}$$

(1) 球面 C と xy 平面が交わってできる円を C_{xy}，球面 D と xy 平面が交わってできる円を D_{xy} とすると，これらの方程式は

$$\begin{cases} C_{xy} : x^2+y^2=1 \\ D_{xy} : (x-4)^2+y^2=4 \end{cases}$$

xy 平面上におけるこの 2 つの円の共通接線 $l_1 : y=px+q$ で，傾き p が $0<p<1$ を満たすものを求める。



C_{xy} は中心が $(0, 0)$ で半径が 1 の円，D_{xy} は中心が $(4, 0)$ で半径 2 の円であるから，$l_1 : px-y+q=0$ がこの 2 円に接する条件は,

$$\begin{cases} \dfrac{|q|}{\sqrt{p^2+1}}=1 \\ \dfrac{|4p+q|}{\sqrt{p^2+1}}=2 \end{cases}$$

$0<p<1$ であり，また図から $q>0$ であるから,

$$\begin{cases} \dfrac{q}{\sqrt{p^2+1}}=1 \\ \dfrac{4p+q}{\sqrt{p^2+1}}=2 \end{cases}$$

$\sqrt{p^2+1}$ を消去すると $q=4p$ を得る。よって，この連立方程式を解いて,

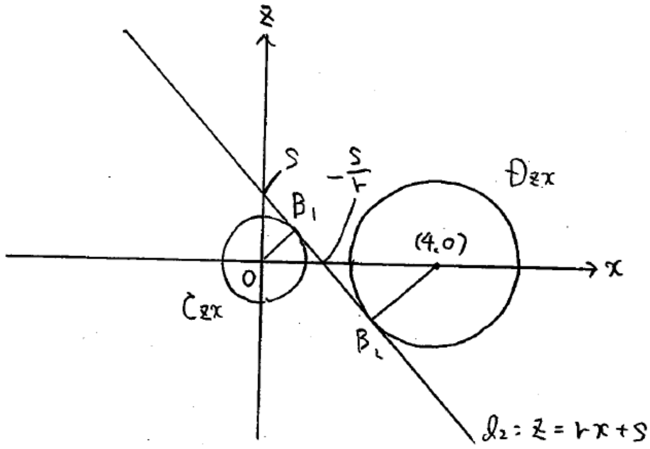
$$p=\frac{1}{\sqrt{15}},\ q=\frac{4}{\sqrt{15}}$$ $\cdots$(答)

[5] つづき 1

(2) 球面 C と zx 平面が交わってできる円を C_{zx}，球面 D と zx 平面が交わってできる円を D_{zx} とすると，これらの方程式は

$$\begin{cases} C_{zx} : x^2 + z^2 = 1 \\ D_{zx} : (x-4)^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

zx 平面上におけるこの 2 つの円の共通接線 $l_2 : z = rx + s$ で，傾き r が $r < -1$ を満たすものを求める。



l_2 が 2 円に接する条件は，(1) と同様にして，

$$\begin{cases} \dfrac{|s|}{\sqrt{r^2+1}} = 1 \\ \dfrac{|4r+s|}{\sqrt{r^2+1}} = 2 \end{cases}$$

$r < -1$ であり，図から $s > 0$ かつ $-\dfrac{s}{r} < 4 \iff 4r + s < 0$ であるから，

$$\begin{cases} \dfrac{s}{\sqrt{r^2+1}} = 1 \\ \dfrac{-(4r+s)}{\sqrt{r^2+1}} = 2 \end{cases}$$

$\sqrt{r^2+1}$ を消去すると $s = -\dfrac{4}{3}r$ を得る。よって，この連立方程式を解いて，

$$r = -\frac{3}{\sqrt{7}},\ s = \frac{4}{\sqrt{7}} \qquad \cdots(答)$$

【(1) と (2) の補足】

(1) と (2) において 2 円の共通接線は 4 本あり，上記の解答では求める共通接線が一意であるとして計算している。なお，(1) と (2) の計算と 2 円が x 軸対称であることから，4 本の共通接線の傾きは，

$$\pm\frac{1}{\sqrt{15}},\ \pm\frac{3}{\sqrt{7}}$$

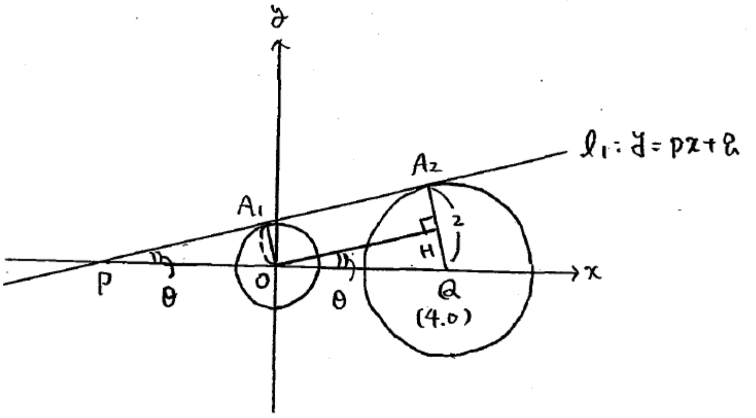
である。よって，実際に，傾き p が $0 < p < 1$ である共通接線と，傾き r が $r < -1$ である共通接線は，ともに一意である。

[5] つづき 2

【(1) と (2) の別解】

2 円の共通接線は，図形的に求めることもできる。

(1) l_1 と x 軸との交点を P とし，円 D_{xy} の中心を Q とする。また，O から線分 $\mathrm{A_2Q}$ に垂線 OH を下ろす。
さらに，$\angle \mathrm{QPA_2} = \theta$ とおく。



$\triangle$QOH と $\triangle \mathrm{QPA_2}$ は相似であり，相似比は $1:2$ から，$\mathrm{OP} = 4$ より P$(-4,\ 0)$ である。
また，$\angle \mathrm{QOH} = \angle \mathrm{QPA_2} = \theta$ であり，$\mathrm{OD} = 4$，$\mathrm{DH} = 1$ より，$\mathrm{OH} = \sqrt{15}$ であるから，

$$\tan\theta = \frac{\mathrm{HQ}}{\mathrm{OH}} = \frac{1}{\sqrt{15}}$$

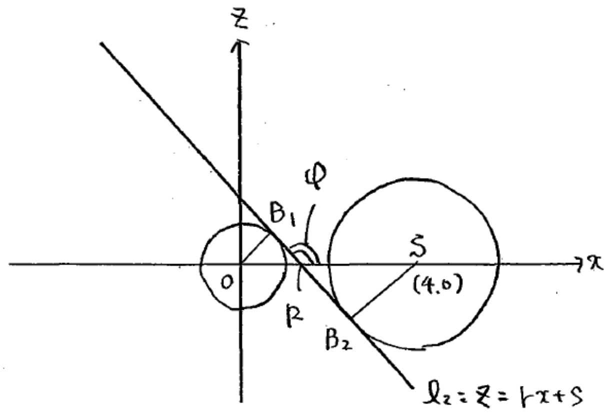
よって，l_1 の方程式は

$$y = (\tan\theta)(x+4) \quad つまり \quad y = \frac{1}{\sqrt{15}}x + \frac{4}{\sqrt{15}}$$

ゆえに，

$$p = \frac{1}{\sqrt{15}},\ q = \frac{4}{\sqrt{15}} \qquad \cdots(答)$$

(2) l_2 と x 軸との交点を R とし，円 D_{zx} の中心を S とする。また，$\angle \mathrm{SRB_1} = \varphi$ とおく。



[5] つづき 3

$\triangle \mathrm{ORB_1}$ と $\triangle \mathrm{SRB_2}$ は相似であり，相似比は $1:2$ から，$\mathrm{OR}=\dfrac{3}{4}$ より $\mathrm{R}\left(\dfrac{4}{3},\,0\right)$ である。

また，$\mathrm{OR}=\dfrac{4}{3}$, $\mathrm{OB_1}=1$ より，$\mathrm{RB_1}=\dfrac{\sqrt{7}}{3}$ であるから，

$$\tan(\pi-\varphi)=\frac{\mathrm{OB_1}}{\mathrm{RB_1}}=\frac{3}{\sqrt{7}}\quad \text{つまり}\quad \tan\varphi=-\frac{3}{\sqrt{7}}$$

よって，l_2 の方程式は

$$y=(\tan\varphi)\left(x-\frac{4}{3}\right)\quad \text{つまり}\quad y=-\frac{3}{\sqrt{7}}x+\frac{4}{\sqrt{7}}$$

ゆえに，

$$r=-\frac{3}{\sqrt{7}},\ s=\frac{4}{\sqrt{7}}$$ …(答)

(3) (1), (2) より，平面 α と β が交わってできる直線 ℓ の方程式は，

$$\begin{cases} y=\dfrac{1}{\sqrt{15}}x+\dfrac{4}{\sqrt{15}} \\ z=-\dfrac{3}{\sqrt{7}}x+\dfrac{4}{\sqrt{7}} \end{cases}$$

$z=0$ とすると $x=\dfrac{4}{3}$, $y=\dfrac{16}{3\sqrt{15}}$ であるから，ℓ と xy 平面の交点 G の座標は

$$\left(\frac{4}{3},\,\frac{16}{3\sqrt{15}},\,0\right)$$ …(答)

(4) ℓ の方程式に $y=0$ を代入することで，ℓ と zx 平面の交点 H の座標は

$$\left(-4,\,0,\,\frac{16}{\sqrt{7}}\right)$$

よって，

$$\overrightarrow{\mathrm{GH}}=\left(-4,\,0,\,\frac{16}{\sqrt{7}}\right)-\left(\frac{4}{3},\,\frac{16}{3\sqrt{15}},\,0\right)=\left(-\frac{16}{3},\,-\frac{16}{3\sqrt{15}},\,\frac{16}{\sqrt{7}}\right)$$

$\vec{d}=-\dfrac{3}{16}\overrightarrow{\mathrm{GH}}=\left(1,\,\dfrac{1}{\sqrt{15}},\,-\dfrac{3}{\sqrt{7}}\right)$ とおいて，$-\dfrac{16}{3}t=u$ とすると，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OT}}&=\overrightarrow{\mathrm{OG}}+t\overrightarrow{\mathrm{GH}}=\overrightarrow{\mathrm{OG}}+u\vec{d}\\&=\left(\frac{4}{3},\,\frac{16}{3\sqrt{15}},\,0\right)+u\left(1,\,\frac{1}{\sqrt{15}},\,-\frac{3}{\sqrt{7}}\right)\\&=\left(\frac{4}{3}+u,\,\frac{16}{3\sqrt{15}}+\frac{1}{\sqrt{15}}u,\,-\frac{3}{\sqrt{7}}u\right)\end{aligned}$$

[5] つづき４

2点 O, M は x 軸上より，△OMT の面積が最小となる条件は，直線 ℓ 上の点 T と x 軸上の点 $\mathrm{N}(k, 0, 0)$ との距離が最小となるとき，つまり $\overrightarrow{\mathrm{NT}} \perp \vec{d}$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{NT}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OM}}$ となることである。

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{NT}} = \overrightarrow{\mathrm{OT}} - \overrightarrow{\mathrm{ON}} &= \left(\frac{4}{3} + u,\ \frac{16}{3\sqrt{15}} + \frac{1}{\sqrt{15}}u,\ -\frac{3}{\sqrt{7}}u\right) - (k, 0, 0)\\ &= \left(\frac{4}{3} + u - k,\ \frac{16}{3\sqrt{15}} + \frac{1}{\sqrt{15}}u,\ -\frac{3}{\sqrt{7}}u\right)\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{NT}} \cdot \vec{d} = 0$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{NT}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OM}} = 0$ より，

$$\begin{cases} \dfrac{4}{3} + u - k + \dfrac{1}{\sqrt{15}} \cdot \left(\dfrac{16}{3\sqrt{15}} + \dfrac{1}{\sqrt{15}}u\right) - \dfrac{3}{\sqrt{7}} \cdot \left(-\dfrac{3}{\sqrt{7}}u\right) = 0 \\ \left(\dfrac{4}{3} + u - k\right) \cdot 4 = 0 \end{cases}$$

つまり

$$\begin{cases} \dfrac{4}{3} + u - k + \dfrac{16}{45} + \dfrac{1}{15}u + \dfrac{9}{7}u = 0 \\ \dfrac{4}{3} + u - k = 0 \end{cases}$$

これを解くと，

$$u = -\frac{56}{213},\ k = \frac{76}{71}$$

したがって，求める値は，

$$t = -\frac{3}{16}u = \frac{7}{142} \qquad \cdots(\text{答})$$

【(4) の別解】

点 T から x 軸に垂線 TI を下ろすと，$\mathrm{I}\left(\dfrac{4}{3} + u, 0, 0\right)$ であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{IT}} = \overrightarrow{\mathrm{OT}} - \overrightarrow{\mathrm{OI}} = \left(0,\ \frac{16}{3\sqrt{15}} + \frac{1}{\sqrt{15}}u,\ -\frac{3}{\sqrt{7}}u\right)$$

2点 O, M は x 軸上より，△OMT の面積が最小となる条件は，$|\overrightarrow{\mathrm{IT}}|$ が最小となることである。ここで，

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{IT}}|^2 &= \left(\frac{16}{3\sqrt{15}} + \frac{1}{\sqrt{15}}u\right)^2 + \left(-\frac{3}{\sqrt{7}}u\right)^2\\ &= \frac{142}{105}u^2 + \frac{32}{45}u + \frac{256}{135}\end{aligned}$$

であり，$|\overrightarrow{\mathrm{IT}}|^2$ が最小となるのは，

$$u = -\frac{1}{2} \cdot \frac{32}{45} \cdot \frac{105}{142} = -\frac{56}{213}$$

このとき $|\overrightarrow{\mathrm{IT}}|$ も最小となる。したがって，求める値は，

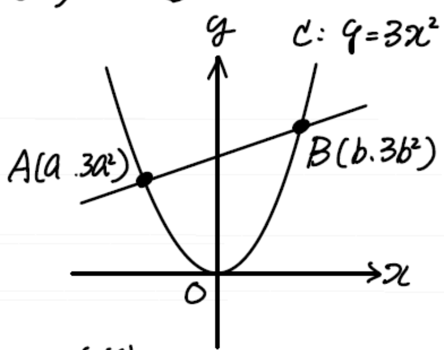
$$t = -\frac{3}{16}u = \frac{7}{142} \qquad \cdots(\text{答})$$

〔6〕

(1) 直線ABの方程式は、

$$y=\frac{3b^2-3a^2}{b-a}(x-a)+3a^2 \quad \text{より} \quad \cdots①$$

$$y=3(b+a)x-3ab$$



よって右図より、

$$S=\int_a^b\{3(b+a)x-3ab-3x^2\}dx$$

$$=-3\int_a^b(x-a)(x-b)\,dx \quad \cdots(※)$$

$$=-3\int_a^b(x-a)\{(x-a)-(b-a)\}dx$$

$$=-3\int_a^b\{(x-a)^2-(b-a)(x-a)\}dx$$

$$=-3\left[\frac{1}{3}(x-a)^3-\frac{b-a}{2}(x-a)^2\right]_a^b$$

$$=-3\left\{\frac{1}{3}(b-a)^3-\frac{1}{2}(b-a)^3\right\}$$

$$=\frac{1}{2}(b-a)^3 \quad \cdots(答)$$

(補足) いわゆる$-\frac{1}{6}$公式を用いると、(※)以降は、

$$S=-3\left\{-\frac{1}{6}(b-a)^3\right\}=\frac{1}{2}(b-a)^3.$$

問題文から使用してよいのかの判断が難しいため、補足とした。

〔6〕（つづき1）

(2) $AB=3$ より、$(b-a)^2+(3b^2-3a^2)^2=9$

よって $(b-a)^2+9(b+a)^2(b-a)^2=9$ …②

ここで $\begin{cases} b+a=p \\ b-a=q \end{cases}$ とおくと、$a<b$ より $q>0$ であり、

②より、$q^2+9p^2q^2=9$ よって、$p^2=\dfrac{9-q^2}{9q^2}$

$p^2 \geqq 0$ より、$9-q^2 \geqq 0$ …③

$q>0$ もふまえると、$0<q \leqq 3$

よって、$0<(b-a)^3 \leqq 27$ より

$0<S \leqq \dfrac{27}{2}$

この等号は $p=0$, $q=3$, つまり $a=-\dfrac{3}{2}$, $b=\dfrac{3}{2}$

のとき成立するので、$T=\dfrac{27}{2}$ …（答）

(3) 直線ABが、点$(0,7)$を通ると仮定すると、

①から $7=-3ab$ より $ab=-\dfrac{7}{3}$ となるが、

$q^2=(b-a)^2=(a+b)^2-4ab=p^2+\dfrac{28}{3}>9$ となり

③に矛盾する。

以上から背理法により、直線ABは点$(0,7)$を通らない。

…（証明終り）

〔6〕（つづき２）

（(3)の別解）

直線ABが、点(0,7)を通ると仮定すると

$$7=-3ab \quad より \quad a=-\frac{7}{3b}$$

これを $b-a=q$ に代入して、

$$b+\frac{7}{3b}=q$$

$$3b^2-3qb+7=0$$

$$b=\frac{3q\pm\sqrt{9q^2-84}}{6}$$

ここで①より、$0<q^2\leqq 9$ なので、

$$-84<9q^2-84\leqq -3$$

よって、bは虚数となり、

点Bがxy平面上にあることに矛盾する。

以上から背理法により、

直線ABは、点(0,7)を通らない。

・・・（証明終り）