$\boxed{1}$

問1

$3^y = 5^z$ より,

$$y = z\log_3 5. \quad \cdots ①$$

次に, $2025 = 3^4 \cdot 5^2$ と, $2025^x = 3^y$ より,

$$(3^4 \cdot 5^2)^x = 3^y.$$
$$3^{4x} \cdot 5^{2x} = 3^y.$$
$$5^{2x} = 3^{y-4x}.$$
$$y - 4x = 2x\log_3 5.$$
$$yz - 4xz = 2xz\log_3 5. \quad \cdots ②$$

①, ②より,

$$yz - 4xz = 2xy.$$

よって,

$$2xy + 4xz - yz = 0.$$

（証明終り）

問2

$$n^4 + 6n^2 + 23 = (n^2 - n + 4)(n^2 + n + 3) - n + 11$$

であり, 正の整数 n に対して, $n^2 + n + 3 > 0$ であるから,

$$\frac{n^4 + 6n^2 + 23}{n^2 + n + 3} = n^2 - n + 4 + \frac{-n + 11}{n^2 + n + 3}.$$

したがって, $n^4 + 6n^2 + 23$ が $n^2 + n + 3$ で割り切れる条件は,

$$\frac{-n+11}{n^2+n+3} \text{ が整数となること} \quad \cdots ①$$

である.

(i) $n = 11$ のとき.

$\dfrac{-n+11}{n^2+n+3} = 0$ となり, ①を満たす.

(ii) $1 \leqq n < 11$ のとき.

$-n + 11 > 0$ より, ①を満たすためには,

$$\frac{-n+11}{n^2+n+3} \geqq 1$$

が必要である. このとき, $n^2 + n + 3 > 0$ より,

$$-n + 11 \geqq n^2 + n + 3.$$
$$(n+4)(n-2) \leqq 0.$$
$$-4 \leqq n \leqq 2.$$

n は $1 \leqq n < 11$ を満たす整数であるから,

$$n = 1, 2$$

に限られる.

・$n = 1$ のとき,

$\dfrac{-n+11}{n^2+n+3} = 2$ となり, ①を満たす.

・$n = 2$ のとき,

$\dfrac{-n+11}{n^2+n+3} = 1$ となり, ①を満たす.

(iii) $n > 11$ のとき.

$-n + 11 < 0$ より, ①を満たすためには,

$$\frac{-n+11}{n^2+n+3} \leqq -1$$

が必要である. このとき, $n^2 + n + 3 > 0$ より,

$$-n + 11 \leqq -(n^2 + n + 3)$$
$$n^2 + 14 \leqq 0$$

これを満たす正の整数 n は存在せず不適.

よって, (i), (ii), (iii)より, 求める n は,

$$n = 1, 2, 11. \quad \cdots (答)$$

2

$$\frac{1}{8}x^4+ax^3+bx^2=f(f(x))+c. \quad \cdots①$$

2次式 $f(x)$ の x^2 の係数を p(実数)とおくと, ①が x についての恒等式となるとき, ①の両辺の x^4 の係数をくらべて

$$\frac{1}{8}=p^3$$

となる. p は実数だから, $p=\frac{1}{2}$ である.

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2+qx+r \quad (q, r \text{は実数})$$

とおくと

$$\begin{aligned}
f(f(x))&=\frac{1}{2}\{f(x)\}^2+qf(x)+r\\
&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x^4+q^2x^2+r^2+qx^3+rx^2+2qrx\right)\\
&\qquad+q\left(\frac{1}{2}x^2+qx+r\right)+r\\
&=\frac{1}{8}x^4+\frac{1}{2}qx^3+\frac{1}{2}(q^2+q+r)x^2\\
&\qquad+(qr+q^2)x+\frac{1}{2}r^2+qr+r
\end{aligned}$$

であり, ①が x についての恒等式となる条件は, ①の両辺の係数をくらべて

$$\begin{cases}a=\frac{1}{2}q,\\ b=\frac{1}{2}(q^2+q+r),\\ 0=qr+q^2,\\ 0=\frac{1}{2}r^2+qr+r+c\end{cases}$$

これは

$$\begin{cases}q=2a,\\ r=2b-4a^2-2a,\\ 0=2a(2b-4a^2-2a)+4a^2,\\ c=-\left(\frac{1}{2}r^2+qr+r\right)\end{cases}$$

すなわち

$$\begin{cases}q=2a,\\ r=2b-4a^2-2a,\\ c=-\left(\frac{1}{2}r^2+qr+r\right),\\ a(b-2a^2)=0\end{cases} \quad \cdots②$$

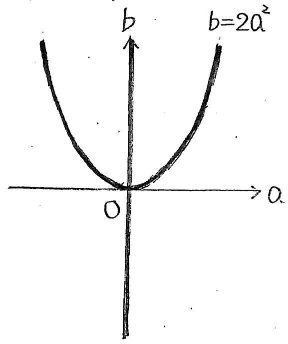
と同値である.

これより, 実数 a, b に対し, 実数 q, r, c が定まる.

したがって, (*)を満たす実数 a, b の条件は②すなわち

「$a=0$ または $b=2a^2$」

であり, ab 平面に図示すると, 図の太線部である.



…(答)

3

Xを3で割った余りが1である状態をA，
Xを3で割った余りが2である状態をB，
Xを3で割った余りが0である状態をC

とし，n桁の数Xに対して状態A, B, Cとなる確率をそれぞれ a_n, b_n, c_n とする．
$n \geqq 2$ のとき，Xが6で割り切れるのは，左から並んだ $n-1$ 個の数を $n-1$ 桁の数と見なすとき，この $n-1$ 桁の数を3で割った余りが1で，左から数えて n 番目の数が2となるときであるから，求める確率を p_n とすると，

$$p_n = a_{n-1} \cdot \frac{1}{2} \quad (n \geqq 2).$$

$n+1$ 桁の数Xが状態Aとなるのは，
左から並んだ n 個の数（n 桁の数）を3で割った余りが2で，左から数えて $n+1$ 番目の数が2のとき
または，

左から並んだ n 個の数（n 桁の数）を3で割った余りが0で，左から数えて $n+1$ 番目の数が1のとき
であるから，

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n + c_n). \quad \cdots ①$$

（同様に
$$b_{n+1} = \frac{1}{2}(c_n + a_n),\ c_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$$
も求まる．）

また，
$$a_n + b_n + c_n = 1 \quad \cdots ②$$
も成り立つ．
②より，
$$b_n + c_n = 1 - a_n$$
であるから ①は
$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(1 - a_n).$$

$$a_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(a_n - \frac{1}{3}\right).$$

$a_1 = \frac{1}{2}$ より，

$$a_n - \frac{1}{3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(a_1 - \frac{1}{3}\right)$$
$$= \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{6}.$$
$$a_n = \frac{1}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}.$$

以上より，求める確率 p_n は，

$$p_n = \frac{1}{6}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}. \quad \cdots（答）$$

（$n=1$ のときも成り立つ．）

4

$f(x)=x^2-2|x|$, $g(x)=x^2-5x+\frac{7}{4}$

とおく。

(1) $g'(x)=2x-5$ であり，点 $(t, g(t))$ における C_2 の接線の方程式は

$$y=(2t-5)(x-t)+t^2-5t+\frac{7}{4}$$

すなわち

$$y=(2t-5)x-t^2+\frac{7}{4} \quad \cdots ①$$

$x<0$ のとき

$$f(x)=x^2+2x,\ f'(x)=2x+2$$

であり，点 $(a, f(a))$ $(a<0)$ における C_1 の接線の方程式は，

$$y=(2a+2)(x-a)+a^2+2a$$

すなわち

$$y=(2a+2)x-a^2 \quad \cdots ②$$

①と②が一致するための条件は

$$\begin{cases} 2t-5=2a+2 \\ -t^2+\frac{7}{4}=-a^2 \end{cases}$$

すなわち

$$\begin{cases} a=-\frac{3}{2} \\ t=2 \end{cases}$$

これは $a<0$ を満たす。

$x>0$ のとき

$$f(x)=x^2-2x,\ f'(x)=2x-2$$

であり，点 $(b, f(b))$ $(b>0)$ における C_2 の接線の方程式は，

$$y=(2b-2)(x-b)+b^2-2b$$

すなわち

$$y=(2b-2)x-b^2 \quad \cdots ③$$

①と③が一致するための条件は

$$\begin{cases} 2t-5=2b-2 \\ -t^2+\frac{7}{4}=-b^2 \end{cases}$$

すなわち

$$\begin{cases} b=-\frac{1}{6} \\ t=\frac{4}{3} \end{cases}$$

これは $b>0$ に反する。

以上より，題意を満たす直線は①で $t=2$ とした

直線 $y=-x-\frac{9}{4}$

のみであり，これが l_2 である。

（証明終り）

(2) $\alpha=a=-\frac{3}{2}$ であり，Pの座標は

$$\left(-\frac{3}{2}, -\left(-\frac{3}{2}\right)-\frac{9}{4}\right)$$

すなわち

$$\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}\right).$$

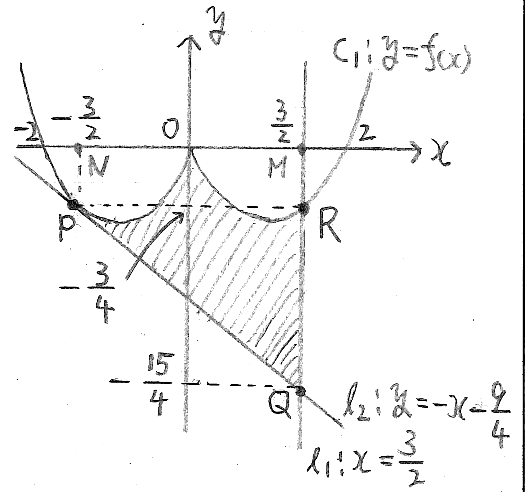
4

Qの座標は

$$\left(\frac{3}{2},\ -\frac{3}{2}-\frac{9}{4}\right)$$

すなわち

$$\left(\frac{3}{2},\ -\frac{15}{4}\right).$$



面積を求める図形は図の斜線部であり，2点M, Nを

$$M\left(\frac{3}{2},0\right),\ N\left(-\frac{3}{2},0\right)$$

と定めると，求める面積は

$$(\text{台形NPQMの面積}) - \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}}\{-f(x)\}dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}+\frac{15}{4}\right)\cdot 3 + 2\int_0^{\frac{3}{2}}(x^2-2x)dx$$

$$= \frac{27}{4} + 2\left[\frac{1}{3}x^3 - x^2\right]_0^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{27}{4} - \frac{9}{4}$$

$$= \frac{9}{2}. \quad \text{---(答)}$$

5

$$\overrightarrow{OX} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{4}\overrightarrow{OB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{OC}$$

とおくと,

$$\overrightarrow{OX} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{s}\overrightarrow{OL} + \frac{2}{4}\cdot\frac{1}{t}\overrightarrow{OM} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{u}\overrightarrow{ON}$$

$$= \frac{1}{4s}\overrightarrow{OL} + \frac{2}{4t}\overrightarrow{OM} + \frac{3}{4u}\overrightarrow{ON}.$$

$\frac{1}{s} + \frac{2}{t} + \frac{3}{u} = 4$ のとき,

$$\frac{1}{4s} + \frac{2}{4t} + \frac{3}{4u} = 1$$

であるから, 点 X は 平面LMN 上にある.

よって,

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{4}\overrightarrow{OB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{OC}$$

をみたす点Pは s, t, u の値によらず

平面LMN 上にある定点である.

（証明終り）