$\boxed{1}$

問1

$|z|=2 \cdots ①$

のとき、

$\left|z-\dfrac{i}{z}\right|^2 \cdots ②$

$=\left(z-\dfrac{i}{z}\right)\left(\overline{z}+\dfrac{i}{\overline{z}}\right)$

$=z\overline{z}+\dfrac{1}{z\overline{z}}+i\left(\dfrac{z}{\overline{z}}-\dfrac{\overline{z}}{z}\right)$

$=|z|^2+\dfrac{1}{|z|^2}-2\left(\dfrac{z}{\overline{z}}\text{の虚部}\right)$

$=4+\dfrac{1}{4}-2\left(\dfrac{z}{\overline{z}}\text{の虚部}\right)$.

$\left|\dfrac{z}{\overline{z}}\right|=\dfrac{|z|}{|\overline{z}|}=\dfrac{2}{2}=1$

より、$\dfrac{z}{\overline{z}}$ の虚部は、

最大値 1　$(z=\sqrt{2}(1+i))$,

最小値 -1　$(z=\sqrt{2}(1-i))$

をとる。よって、$\left|z-\dfrac{i}{z}\right|^2$ は、

最大値 $4+\dfrac{1}{4}+2=\dfrac{25}{4}$,

最小値 $4+\dfrac{1}{4}-2=\dfrac{9}{4}$

をとる。したがって、$\left|z-\dfrac{i}{z}\right|$ は

最大値 $\dfrac{5}{2}$, 最小値 $\dfrac{3}{2}$

をとる。…(答)

※ x, y を実数として、

$-2y=i\{(x+iy)-(x-iy)\}$.

(別解)

①より、$-\pi \leqq \theta < \pi$ として、

$z=2(\cos\theta+i\sin\theta) \cdots ③$

とおける。これを②に代入して、整理すると、

$4+\dfrac{1}{4}-2\sin 2\theta$

を得る。これより、②は、

$\theta=-\dfrac{\pi}{4}$ のとき、最大値、

$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき、最小値

をとることがわかる。

(参考1)

$i=\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}$

であり、③のとき、

$\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{2}\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}$

であるから、

$\dfrac{i}{z}=\dfrac{1}{2}\left\{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)\right\}$

である。

1

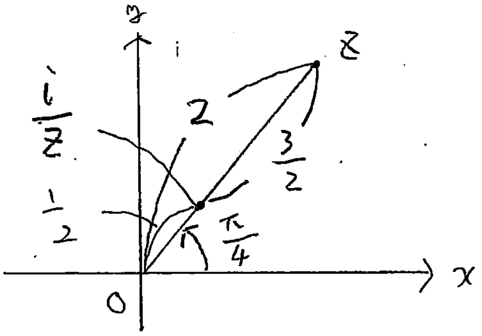
$$\theta=\frac{\pi}{2}-\theta$$

すなわち，

$$\theta=\frac{\pi}{4}$$

のとき，次の図のようになり，

$\left|z-\frac{i}{z}\right|$ は最小値 $\frac{3}{2}$ をとる．



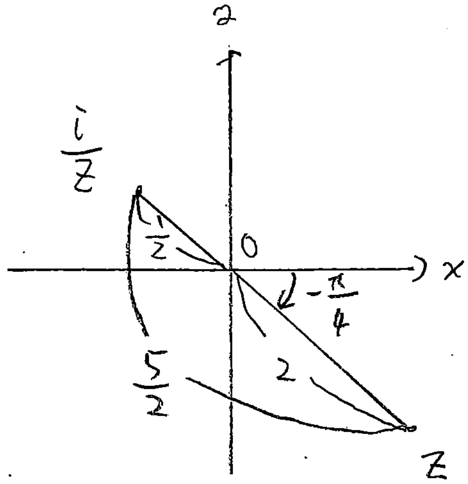
$$\theta+\pi=\frac{\pi}{2}-\theta$$

すなわち，

$$\theta=-\frac{\pi}{4}$$

のとき，次の図のようになり，

$\left|z-\frac{i}{z}\right|$ は最大値 $\frac{5}{2}$ をとる．



（参考2）

③より，

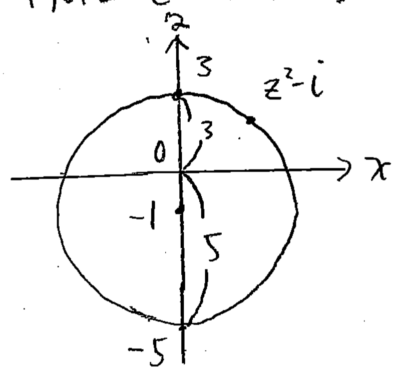
$$z^2=4(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)$$

であるから，

z^2 は O が中心，半径4

z^2-i は $-i$ が中心，半径4

の円周上をくまなく動く．



よって，

$$\left|z-\frac{i}{z}\right|=\frac{|z^2-i|}{|z|}=\frac{|z^2-i|}{2}$$

の最大値は $\frac{5}{2}$，最小値 $\frac{3}{2}$．

1

問2 (1)

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x\sqrt{x^2+1}+2x^3+1}{x^2+1}dx$$

$$= \int_0^{\sqrt{3}}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+2x-\frac{2x-1}{x^2+1}\right)dx.$$

$$\int_0^{\sqrt{3}}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+2x\right)dx$$

$$= \left[\sqrt{x^2+1}+x^2\right]_0^{\sqrt{3}}$$

$$= 4.$$

$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{2x-1}{x^2+1}dx$ において.

$x=\tan\theta \ \left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ とおくと.

$$\frac{dx}{d\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta},$$

x	$0 \to \sqrt{3}$
θ	$0 \to \frac{\pi}{3}$

であるから,

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{2x-1}{x^2+1}dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{2\tan\theta-1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(2\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}-1\right)d\theta$$

$$= \Big[-2\log|\cos\theta|-\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= 2\log 2-\frac{\pi}{3}.$$

以上より, 求める値は,

$$4-2\log 2+\frac{\pi}{3}. \cdots(答)$$

$\boxed{1}$

問2 (2)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}}\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\right| dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\,dx$$

$$= \left[-2\log\left|\cos\frac{x}{2}\right|\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \log 2. \quad \cdots (答)$$

$\boxed{2}$

以下，合同式は3を法とする．

$1^6=(-1)^6=1^4=(-1)^4=1$ より，

$x^6+y^4\equiv 0$ であれば $x^6\equiv y^4\equiv 0$．

$9z^2\equiv 0$ より，$x^6\equiv y^4\equiv 0$ であり，

$$x\equiv y\equiv 0.$$

$x=3x_1,\ y=3y_1$ （x_1, y_1 は正の整数）

と表せ，

$$9z^2=3^4(9x_1^6+y_1^4)$$

より

$$z^2=9(9x_1^6+y_1^4)\equiv 0.$$

$1^2=(-1)^2=1$ より，

$z^2\equiv 0$ であれば $z\equiv 0$．

よって，$z=3z_1$ （z_1 は正の整数）

と表せ，

$$z_1^2=9x_1^6+y_1^4.$$

$(x_1, y_1)=(1, 1)$ なら $z_1^2=10$．

（不適）

$(x_1, y_1)=(1, 2)$ なら $z_1^2=25$．

$z_1=5$．（適）

$x_1\geqq 2$ なら

$$z_1^2>9\cdot 2^6>25.$$

N が最小となるのは z_1^2 が最小のときであるから，

$(x_1, y_1, z_1)=(1, 2, 5)$

のときに N は最小値をとる．

求める最小値は，

$$9\cdot(3\cdot 5)^2=2025 \quad \cdots(答)$$

$\boxed{3}$

$f(x) = x^2 \log x$ より,

$f'(x) = x(2\log x + 1)$.

よって, $y = f(x)$ 上の点 $(t, f(t))$ における接線の傾きは,

$f'(t) = t(2\log t + 1)$.

$\frac{1}{\sqrt{e}} < t \leqq e$ において

$f'(t) \neq 0$ であるから,

$l_t : y = -\frac{1}{f'(t)}(x - t) + g(t)$.

$y = 0$ のとき,

$x = t + f'(t)g(t)$

であるから,

$p(t) = t^3 \log t(2\log t + 1)$

$\left(\frac{1}{\sqrt{e}} < t \leqq e\right)$.

$p'(t) = (3t^2\log t + t^2)(2\log t + 1) + (t^3\log t)\cdot\frac{2}{t}$

$= t^2\{6(\log t)^2 + 7\log t + 1\}$

$= t^2(\log t + 1)(6\log t + 1)$.

$\frac{1}{\sqrt{e}} < t \leqq e$ において,

$-\frac{1}{2} < \log t \leqq 1$

であることに注意すると,

$p(t)$ の増減は次のようになる。

t	$\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt[6]{e}}$	$\cdots$	e
$p'(t)$		$-$	0	$+$	
$p(t)$	(0)	↘	$-\frac{1}{9\sqrt{e}}$	↗	$3e^3$

したがって, $p(t)$ の取りうる値の範囲は,

$-\frac{1}{9\sqrt{e}} \leqq p(t) \leqq 3e^3$. …(答)

4

(1)

$$\frac{1}{s}+\frac{2}{t}+\frac{3}{u}=4 \quad \cdots①$$

$(s,t,u)=(-1,1,1),(2,4,1),$
$(1,1,3)$

は①を満たす．これらの値で定まる平面LMNをそれぞれα, β, γとする．α, β, γが

$$\overrightarrow{OP}=a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}$$

（a, b, cは実数）

で表される点Pを通るとする．

このとき，

$$\overrightarrow{OP}=(-a)(-\overrightarrow{OA})+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}$$

と表せ，$\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$は一次独立であるから．Pがα上にあるので

$$-a+b+c=1 \quad \cdots②$$

同様に

$$\overrightarrow{OP}=\frac{a}{2}(2\overrightarrow{OA})+\frac{b}{4}(4\overrightarrow{OB})+c(\overrightarrow{OC}),$$

$$\overrightarrow{OP}=a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+\frac{c}{3}(3\overrightarrow{OC})$$

とも表せるから，Pはβ, γ上にもあることから

$$\frac{a}{2}+\frac{b}{4}+c=1 \quad \cdots③$$

$$a+b+\frac{c}{3}=1 \quad \cdots④$$

②，③，④より組(a,b,c)は

$$(a,b,c)=\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right) \quad \cdots⑤$$

と1組に定まるので問題文の条件を満たすPは2つ以上は存在しない．さらに．⑤で定まる点Pに対して，

$$\overrightarrow{OP}=\left(\frac{1}{4s}\right)(s\overrightarrow{OA})+\left(\frac{1}{2t}\right)(t\overrightarrow{OB})+\left(\frac{3}{4u}\right)(u\overrightarrow{OC})$$

$$=\frac{1}{4s}\overrightarrow{OL}+\frac{1}{2t}\overrightarrow{OM}+\frac{3}{4u}\overrightarrow{ON}$$

と表せ，①より$\frac{1}{4s}+\frac{1}{2t}+\frac{3}{4u}=1$

であるから．①を満たす任意のs, t, uで定まる平面LMNはこの点Pを通る．

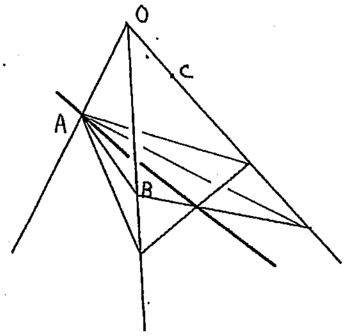
（証明終り）

4

（条件を満たすPが2個以上ないことの別解）

異なる2点P, Qが条件を満たすと仮定して矛盾を導く．

$L=A$ となる2つの平面LMN（たとえば $(s, t, u)=(1, 1, 3), \left(1, \frac{4}{3}, 2\right)$）はともにP, Q, Aを通る．



平面上に2点があればその2点を通る直線も平面上にあるから，

直線PQはAを通る．

同様に，直線PQはB, Cを通る．

よって，直線PQは3点A, B, Cを通ることになり，これは矛盾である．

（証明終り）

(2)

$$\overrightarrow{OP}=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{6}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}\right)$$

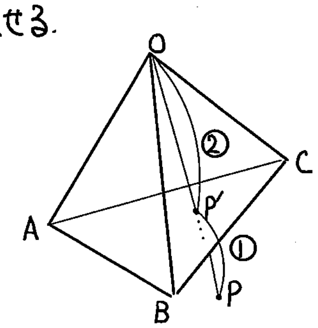
と表せ．$\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=1$ であるから

$$\overrightarrow{OP'}=\frac{1}{6}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$$

で定まる平面ABC上の点P′に対し

$$\overrightarrow{OP}=\frac{3}{2}\overrightarrow{OP'}$$

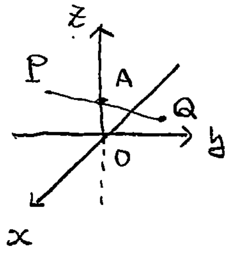
と表せる．



以上より，求める体積は

$\frac{1}{2}V$．…（答）

$\boxed{5}$　$A\left(0, 0, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$, $P\left(\cos\theta, \sin\theta, \frac{1}{2}\cos\theta\right)$



$Q(x, y, 0)$ とおく

$\overrightarrow{AQ} = t\overrightarrow{AP}$ (t:実数)

$\overrightarrow{AP} = \left(\cos\theta, \sin\theta, \frac{1}{2}\cos\theta - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

$\overrightarrow{AQ} = \left(x, y, -\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ より

$$\begin{cases} x = t\cos\theta \\ y = t\sin\theta \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} = t\left(\frac{1}{2}\cos\theta - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) \end{cases}$$

すなわち

$$(*)\begin{cases} t = \dfrac{1}{1-\sqrt{2}\cos\theta} \\ x = t\cos\theta \qquad \left(-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}\right) \\ y = t\sin\theta \end{cases}$$

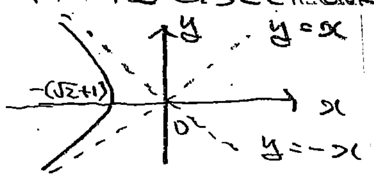
Oを極，x軸の正の部分を始線とする極座標において点Qの軌跡の極方程式は

$$r(\theta) = \frac{1}{1-\sqrt{2}\cos\theta} \quad \left(-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}\right)$$

$r(-\theta) = r(\theta)$ より曲線は始線に関して対称より $0 \leqq \theta < \frac{\pi}{4}$ として考えると $r(\theta)$ は単調減少であり

$$-\infty < r(\theta) \leqq \frac{1}{1-\sqrt{2}} = -(\sqrt{2}+1)$$

対称性を考えて点Qの軌跡を図示して



左図の実線 …(答)

(漸近線までは求まらない)

(別解)((*)まで同じ)

$$\begin{cases} x = \dfrac{\cos\theta}{1-\sqrt{2}\cos\theta} & \cdots ① \\ y = \dfrac{\sin\theta}{1-\sqrt{2}\cos\theta} & \cdots ② \end{cases} \quad \left(-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}\right)$$

すなわち

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{2}x+1} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{\sqrt{2}x+1} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} < \dfrac{x}{\sqrt{2}x+1} \leqq 1 \end{cases}$$

すなわち

$$\begin{cases} \left(\dfrac{x}{\sqrt{2}x+1}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{\sqrt{2}x+1}\right)^2 = 1 \\ \sqrt{2} > \dfrac{\sqrt{2}x+1}{x} \geqq 1 \end{cases}$$

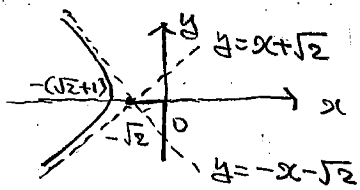
すなわち

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = (\sqrt{2}x+1)^2 \\ \sqrt{2} > \sqrt{2} + \frac{1}{x} \geqq 1 \end{cases}$$

すなわち

$$\begin{cases} (x+\sqrt{2})^2 - y^2 = 1 \\ x \leqq -(\sqrt{2}+1) \end{cases}$$

(双曲線の $x \leqq -(\sqrt{2}+1)$ の部分)



…(答)

6

Y_2が奇数となるのは

$$(X_1, X_2)=(1, 1)$$

のときなので，

$$p_2=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$$

Y_3が奇数となるのは

$$(X_1, X_2, X_3)=(1, 1, 0),\ (0, 1, 1)$$

のときなので，

$$p_3=\frac{2}{2^3}=\frac{1}{4}$$

$n \geqq 4$のとき，Y_nが奇数となるのは，

(ア)　$X_{n-1}=0$ かつ Y_nが奇数

(イ)　$X_{n-1}=1$ かつ Y_nが奇数

のいずれかが起こるときである。

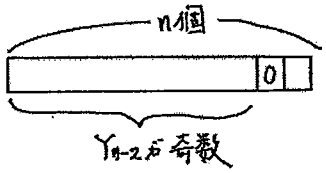
(ア)が起こるのは

$X_{n-1}=0$ かつ Y_{n-2}が奇数

が起こるときなので，その確率は

$$\frac{1}{2}p_{n-2}$$

(ア)



(イ)が起こるのは

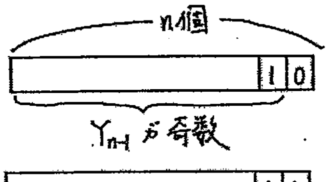
(イ-1)　$X_{n-1}=1$ かつ Y_{n-1}が奇数 かつ $X_n=0$

または

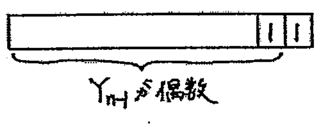
(イ-2)　$X_{n-1}=1$ かつ Y_{n-1}が偶数 かつ $X_n=1$

が起こるときである。

(イ-1)



(イ-2)



ここで

$X_n=1$ かつ Y_nが奇数

が起こる確率をq_nとすると，

(イ-1)が起こる確率は $\frac{1}{2}q_{n-1}$

(イ-2)が起こる確率は $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-q_{n-1}\right)$

であり，(イ-1)，(イ-2)は排反であるから，

(イ)が起こる確率は

$$\frac{1}{2}q_{n-1}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-q_{n-1}\right)=\frac{1}{4}$$

(ア)，(イ)は排反であるから，

$$p_n=\frac{1}{2}p_{n-2}+\frac{1}{4}\quad (n=4, 5, 6, \cdots)$$

$$p_n-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(p_{n-2}-\frac{1}{2}\right)\ \cdots①$$

①で$n=2m$とおくと，

$$p_{2m}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(p_{2(m-1)}-\frac{1}{2}\right)\quad (m=2, 3, 4, \cdots)$$

数列$\left\{p_{2m}-\frac{1}{2}\right\}$は初項$p_2-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$，公比$\frac{1}{2}$の等比数列なので，

$$p_{2m}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}\quad (m=1, 2, 3, \cdots)$$

$$p_{2m}=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}$$

①で$n=2m-1$とおくと，

$$p_{2m-1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(p_{2(m-1)-1}-\frac{1}{2}\right)\quad (m=3, 4, 5, \cdots)$$

数列$\left\{p_{2m-1}-\frac{1}{2}\right\}$は初項が$p_3-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$，公比$\frac{1}{2}$の等比数列なので，

$$p_{2m-1}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{m-2}\quad (m=2, 3, 4, \cdots)$$

$$p_{2m-1}=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{m}$$

以上より

$$p_n=\begin{cases}\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n+2}{2}} & (n\text{が偶数のとき})\\ \frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n+1}{2}} & (n\text{が奇数のとき})\end{cases}$$