$\boxed{1}$

(1)　$2025 = 3^4 \cdot 5^2$ であるから,

$$d(2025) = (1+4)(1+2) = 15$$

よって,

$$f(2025) = \frac{15}{\sqrt{2025}} = \frac{1}{3} \qquad \cdots(\text{答})$$

(2)　$d\left(p^k\right) = k+1$ より,

$$f\left(p^k\right) = \frac{k+1}{\sqrt{p^k}}$$

$f\left(p^k\right) \leqq f\left(p^{k+1}\right)$　のとき,

$$\frac{k+1}{\sqrt{p^k}} \leqq \frac{k+2}{\sqrt{p^{k+1}}}$$

$$\sqrt{p} \leqq \frac{k+2}{k+1} \qquad \cdots ①$$

ここで,

$$\frac{k+2}{k+1} = 1 + \frac{1}{k+1} \leqq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

よって，①のとき,

$$\sqrt{p} \leqq \frac{3}{2} \quad \text{つまり} \quad p \leqq \frac{9}{4}$$

p は素数ゆえ,

$$p = 2$$

このとき①は,

$$\sqrt{2} \leqq 1 + \frac{1}{k+1}$$

$$k+1 \leqq \frac{1}{\sqrt{2}-1}$$

$$k \leqq \sqrt{2}$$

k は正の整数ゆえ,

$$k = 1$$

よって,

$$p = 2, \quad k = 1 \qquad \cdots(\text{答})$$

(3)　$n = 1$ のとき,

$$f(1) = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1$$

$n \geqq 2$ のとき，n の素因数分解表示を

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_m^{\alpha_m}$$

とおく．ここで，$p_1 \sim p_m$ は $p_1 < p_2 < \cdots < p_m$ を満たす素数，$\alpha_1 \sim \alpha_m$ は正の整数である．

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdots(1+\alpha_m)}{\sqrt{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_m^{\alpha_m}}} \\ &= \frac{1+\alpha_1}{\sqrt{p_1^{\alpha_1}}} \cdot \frac{1+\alpha_2}{\sqrt{p_2^{\alpha_2}}} \cdots \frac{1+\alpha_m}{\sqrt{p_m^{\alpha_m}}} \\ &= f(p_1^{\alpha_1}) f(p_2^{\alpha_2}) \cdots f(p_m^{\alpha_m}) \end{aligned}$$

$\boxed{1}$ **(つづき)**

そこで，素数 p を固定して $f\left(p^k\right)$ $(k=1,2,\cdots)$ を考える．

まず，(2) より，

$$p=2 \text{ のとき，} \quad f\left(2^1\right) \leqq f\left(2^2\right) > f\left(2^3\right) > \cdots$$

であり，

$$f\left(2^1\right)=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}, \quad f\left(2^2\right)=\frac{3}{\sqrt{2^2}}=\frac{3}{2}$$

なので，

$$f\left(2^k\right) \text{ の最大値は，} f\left(2^2\right)=\frac{3}{2}\,(>1)$$

よって，素因数 2 を 2 つ含むときに最大となる．

また，$p \geqq 3$ のときは (2) より

$$f\left(p^k\right) \text{ は } k \text{ の減少関数だから } f(p) \text{ が最大}$$

さらに $f(p)=\dfrac{2}{\sqrt{p}}$ について

$$f(3)=\frac{2}{\sqrt{3}}>1, \quad f(5)=\frac{2}{\sqrt{5}}<1, \quad f(7)=\frac{2}{\sqrt{7}}<1, \cdots$$

よって，素因数 3 を 1 つ含み，5 以上の素因数は含むべきでない．

以上より，$n \geqq 2$ のとき，$f(n)$ の最大値は，

$$f\left(2^2 \cdot 3^1\right)=\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$

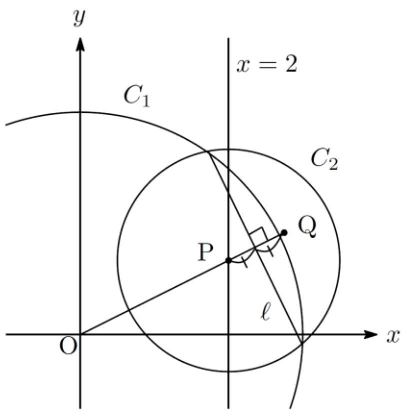
$\sqrt{3}>f(1)\ (=1)$ であるから，$f(n)$ $(n=1,2,\cdots)$ が最大となるのは

$$n=2^2 \cdot 3^1=12 \qquad \cdots(\text{答})$$

のときで最大値は

$$\sqrt{3} \qquad \cdots(\text{答})$$

$\boxed{2}$



(1)　P は直線 $x = 2$ の上にあるから，

$$\mathrm{P}(2,\ t) \quad (t \text{ は実数})$$

とおけ，このとき，C_1 の中心 O と C_2 の中心 P の距離は $\mathrm{OP} = \sqrt{4 + t^2}$ である．

C_1 の半径は 3，C_2 の半径は 1 であるから，C_1 と C_2 が共有点を 2 つ持つ条件は

$$3 - 1 < \mathrm{OP} < 3 + 1$$
$$2 < \sqrt{4 + t^2} < 4$$
$$4 < 4 + t^2 < 16$$
$$0 < t^2 < 12$$
$$-2\sqrt{3} < t < 0,\ 0 < t < 2\sqrt{3} \qquad \cdots ①$$

であり，求める範囲は

$$-2\sqrt{3} < (\mathrm{P} \text{ の } y \text{ 座標}) < 0,\ 0 < (\mathrm{P} \text{ の } y \text{ 座標}) < 2\sqrt{3} \qquad \cdots (\text{答})$$

となる．

(2)　$\mathrm{P}(2,\ t)$，$\mathrm{Q}(X,\ Y)$（ただし，①）とおくと，Q は直線 OP : $y = \dfrac{t}{2}x$ の上にあるから，

$$Y = \frac{t}{2}X \qquad \cdots ②$$

が成り立つ．

一方，C_1 の方程式 $x^2 + y^2 = 9$ は，

$$x^2 + y^2 - 9 = 0$$

と表せ，C_2 の方程式 $(x-2)^2 + (y-t)^2 = 1$ は，

$$x^2 + y^2 - 4x - 2ty + t^2 + 3 = 0$$

と表せるので，方程式

$$x^2 + y^2 - 9 + k(x^2 + y^2 - 4x - 2ty + t^2 + 3) = 0 \quad (k \text{ は実数})$$

が表す図形は C_1 と C_2 の 2 つの共有点を通る．これが直線の方程式を表すのは $k = -1$ のときであるから，ℓ の方程式は

$\boxed{2}$（つづき１）

$$x^2+y^2-9-(x^2+y^2-4x-2ty+t^2+3)=0$$
$$4x+2ty-t^2-12=0$$

となる．よって，線分 PQ の中点 $\left(\dfrac{2+X}{2},\ \dfrac{t+Y}{2}\right)$ が ℓ の上にあることから，

$$4\cdot\frac{2+X}{2}+2t\cdot\frac{t+Y}{2}-t^2-12=0$$
$$2X+tY-8=0 \qquad \cdots③$$

が得られる．

$X=0$ のときは，②より $Y=0$ となるが，これは③を満たさない．ゆえに，以下では $X\neq 0$ としてよく，このとき②は $t=\dfrac{2Y}{X}$ と表せるので，これを③に代入・整理すると，

$$2X+\frac{2Y}{X}\cdot Y-8=0$$
$$X^2+Y^2-4X=0$$
$$(X-2)^2+Y^2=4 \qquad \cdots④$$

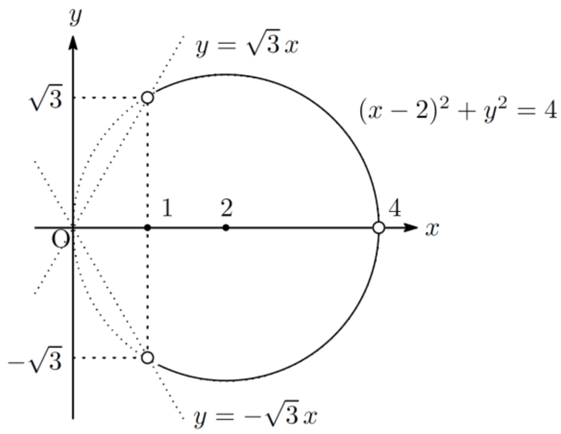
となる．このとき，$X\neq 0$ より $X>0$ であることに注意して，$t=\dfrac{2Y}{X}$ を①に代入・整理すると，

$$-2\sqrt{3}<\frac{2Y}{X}<0,\ 0<\frac{2Y}{X}<2\sqrt{3}$$
$$-\sqrt{3}\,X<Y<0,\ 0<Y<\sqrt{3}\,X \qquad \cdots⑤$$

となる．以上④，⑤より，Q の軌跡は

円 $(x-2)^2+y^2=4$ の $-\sqrt{3}\,x<y<0,\ 0<y<\sqrt{3}\,x$ を満たす部分　　$\cdots$(答)

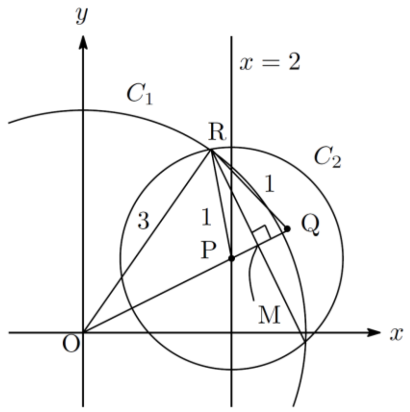
であり，次図の実線部分（点線と白丸除く）のようになる．



$\cdots$（答）

$\boxed{2}$（つづき２）

【（２）の別解】



C_1 と C_2 の共有点の１つを R，線分 PQ の中点を M（P = Q のときは P = M）とすると，O は線分 PQ の P 側への延長上または Q 側への延長上にあるので,，

$$\mathrm{QM} = \frac{\mathrm{PQ}}{2} = \frac{|\mathrm{OQ} - \mathrm{OP}|}{2},$$
$$\mathrm{OM} = \frac{\mathrm{OQ} + \mathrm{OP}}{2}$$

であり，RM ⊥ OP であるから，三平方の定理より

$$\mathrm{RM}^2 = \mathrm{QR}^2 - \mathrm{QM}^2 = 1^2 - \left(\frac{|\mathrm{OQ} - \mathrm{OP}|}{2}\right)^2 = 1^2 - \left(\frac{\mathrm{OQ} - \mathrm{OP}}{2}\right)^2,$$
$$\mathrm{RM}^2 = \mathrm{OR}^2 - \mathrm{OM}^2 = 3^2 - \left(\frac{\mathrm{OQ} + \mathrm{OP}}{2}\right)^2$$

が成り立つ．この２式から RM^2 を消去すると，

$$1^2 - \left(\frac{\mathrm{OQ} - \mathrm{OP}}{2}\right)^2 = 3^2 - \left(\frac{\mathrm{OQ} + \mathrm{OP}}{2}\right)^2$$
$$\left(\frac{\mathrm{OQ} + \mathrm{OP}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{OQ} - \mathrm{OP}}{2}\right)^2 = 3^2 - 1^2$$
$$\mathrm{OQ} \cdot \mathrm{OP} = 8$$
$$\mathrm{OQ} = \frac{8}{\mathrm{OP}} \qquad \cdots ⑥$$

となる．

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ は同じ向きであるから，$\mathrm{P}(2,\ t)$，$\mathrm{Q}(X,\ Y)$（ただし，①）とおくと，⑥より

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{OP}} \times \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{8}{\mathrm{OP}^2}\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{8}{4+t^2}(2,\ t)$$

すなわち，

$$X = \frac{16}{4+t^2},\ Y = \frac{8t}{4+t^2} \qquad \cdots ⑦$$

と表せる．

$\boxed{2}$（つづき３）

⑦において，$\dfrac{16}{4+t^2}>0$ より $X>0$ であり，$t=\dfrac{2Y}{X}$ であるから，これを $X=\dfrac{16}{4+t^2}$ に代入・整理すると，

$$X=\frac{16}{4+\left(\dfrac{2Y}{X}\right)^2}$$
$$X=\frac{16X^2}{4(X^2+Y^2)}$$
$$X^2+Y^2=4X$$
$$(X-2)^2+Y^2=4 \qquad \cdots ④$$

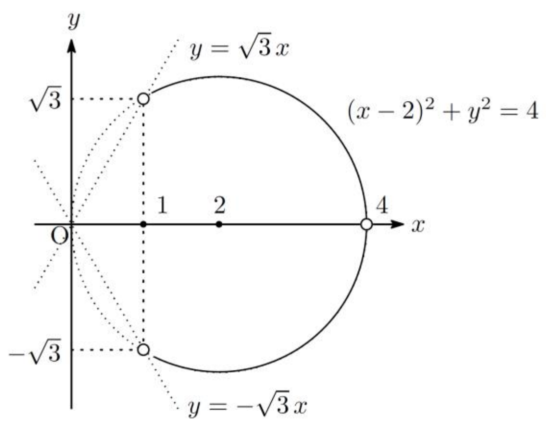
となり，$t=\dfrac{2Y}{X}$ を①に代入・整理すると，

$$-2\sqrt{3}<\frac{2Y}{X}<0,\ 0<\frac{2Y}{X}<2\sqrt{3}$$
$$-\sqrt{3}X<Y<0,\ 0<Y<\sqrt{3}X \qquad \cdots ⑤$$

となる．以上④，⑤より，Q の軌跡は

円 $(x-2)^2+y^2=4$ の $-\sqrt{3}x<y<0,\ 0<y<\sqrt{3}x$ を満たす部分　　$\cdots$(答)

であり，次図の実線部分（点線と白丸除く）のようになる．



$\cdots$（答）

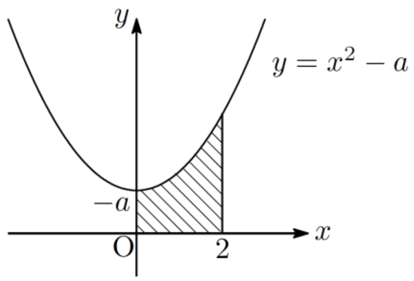
【（２）の別解終り】

3

$$6\int_0^2 |x^2-a|\,dx = a^2-2a+k \qquad \cdots ①$$

$I(a)=\displaystyle\int_0^2 |x^2-a|\,dx$ とおくと，

（ア）$a \leqq 0$ のとき，$I(a)$ は次図の斜線部分の面積である．

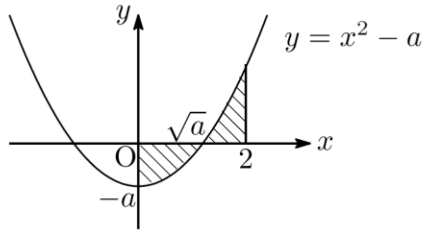


$$\begin{aligned}6I(a) &= 6\int_0^2 (x^2-a)\,dx\\ &= 6\left[\frac{1}{3}x^3-ax\right]_0^2\\ &= 16-12a\end{aligned}$$

であるから，①より，

$$\begin{aligned}16-12a=a^2-2a+k &\iff -a^2-10a+16=k\\ &\iff -(a+5)^2+41=k\end{aligned}$$

（イ）$0<a<4$，すなわち $0<\sqrt{a}<2$ のとき，$I(a)$ は次図の斜線部分の面積である．



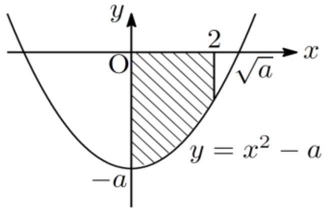
$$\begin{aligned}6I(a) &= 6\left\{-\int_0^{\sqrt{a}}(x^2-a)\,dx+\int_{\sqrt{a}}^2(x^2-a)\,dx\right\}\\ &= -6\left[\frac{1}{3}x^3-ax\right]_0^{\sqrt{a}}+6\left[\frac{1}{3}x^3-ax\right]_{\sqrt{a}}^2\\ &= 8a\sqrt{a}-12a+16\end{aligned}$$

であるから，①より，

$$8a\sqrt{a}-12a+16=a^2-2a+k \iff -a^2+8a\sqrt{a}-10a+16=k$$

3 （つづき１）

（ウ） $a \geqq 4$，すなわち $\sqrt{a} \geqq 2$ のとき，$I(a)$ は次図の斜線部分の面積である．



$$6I(a) = -6\int_0^2 (x^2 - a)\,dx$$
$$= 12a - 16$$

であるから，①より，

$$12a - 16 = a^2 - 2a + k \iff -a^2 + 14a - 16 = k$$
$$\iff -(a-7)^2 + 33 = k$$

（ア），（イ），（ウ）より，

$$f(a) = \begin{cases} -(a+5)^2 + 41 & (a \leqq 0), \\ -a^2 + 8a\sqrt{a} - 10a + 16 & (0 < a < 4), \\ -(a-7)^2 + 33 & (4 \leqq a) \end{cases}$$

とおくと，

$$f(a) = k$$

が成り立つ実数 a がちょうど 4 つ存在するような実数 k の範囲を求めればよい．

$0 < a < 4$ のとき，$p = \sqrt{a}$ とおくと，

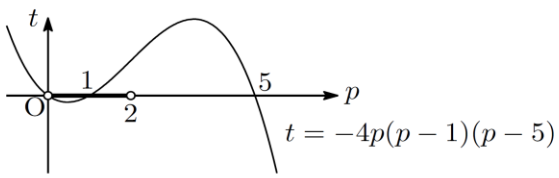
$$p \text{ は } a \text{ の増加関数} \qquad \cdots ②$$

であり，

$$f(a) = -p^4 + 8p^3 - 10p^2 + 16 \qquad (0 < p < 2)$$

これを $g(p)$ とおくと，

$$\frac{dg(p)}{dp} = -4p^3 + 24p^2 - 20p$$
$$= -4p(p-1)(p-5)$$

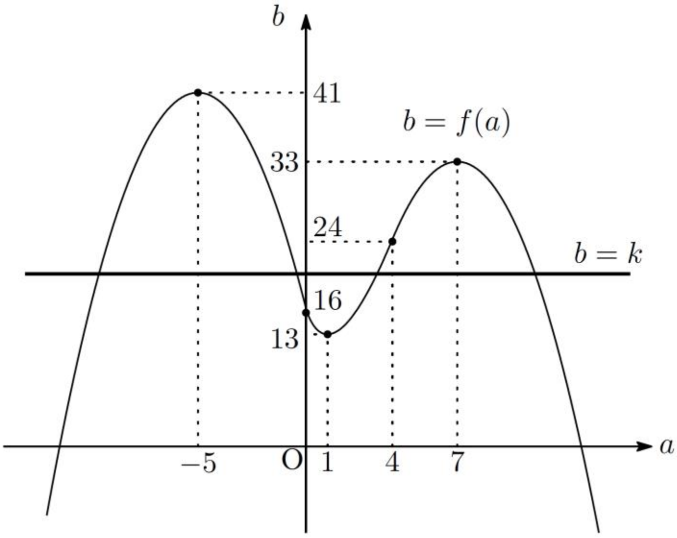


3 （つづき２）

したがって，②を考慮すると，$0 < a < 4$ における $f(a)$ の増減は，

a	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	(4)
p	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	(2)
$\frac{dg(p)}{dp}$		$-$	0	$+$	
$g(p)$		$\searrow$		$\nearrow$	
$f(a)$	(16)	$\searrow$	13	$\nearrow$	(24)

となり，したがって，$b = f(a)$ のグラフは次のようになる．



よって，$f(a) = k$ が成り立つ実数 a がちょうど 4 つ存在するような実数 k の範囲は，

$$13 < k < 33 \qquad \cdots (答)$$

$\boxed{4}$

A$(0,\ 3,\ -5)$，B$(5,\ -2,\ 10)$ に対して，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

とし，$t=\frac{1}{5}$，$\frac{3}{5}$ に対する点 Q をそれぞれ E，F とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{4}{5}(0,\ 3,\ -5)+\frac{1}{5}(5,\ -2,\ 10)=(1,\ 2,\ -2),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\frac{2}{5}(0,\ 3,\ -5)+\frac{3}{5}(5,\ -2,\ 10)=(3,\ 0,\ 4).$$

よって，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}},\quad \frac{1}{5}\leqq t\leqq\frac{3}{5}$$

で表される点 Q は線分 EF（両端を含む）上を動く．

次に，点 Q を固定したとき，

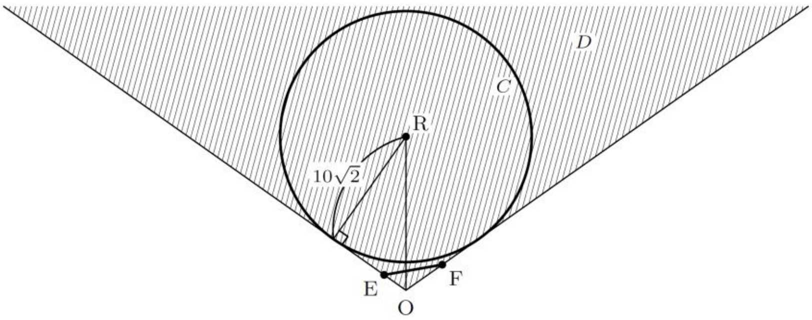
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OQ}},\quad s\geqq 0$$

で表される点 P は，O を端点とする半直線 OQ 上を動く．

したがって，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\left\{(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right\},\quad s\geqq 0,\quad \frac{1}{5}\leqq t\leqq\frac{3}{5}$$

で表される点 P の存在する領域 D は，平面 OEF 上で O を端点とする半直線 OE，OF にはさまれた領域である．（次の図の斜線部分，境界を含む）



D に含まれる半径 $10\sqrt{2}$ の円の中心を R とすると，この円のうち，OR が最小となる円 C は，上の図のようにこの円が半直線 OE，OF の双方に接するときである．

$\angle\mathrm{EOF}=\theta$ とすると，

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OF}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OE}}||\overrightarrow{\mathrm{OF}}|}=\frac{3+0-8}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{3^2+0+4^2}}=-\frac{1}{3}.$$

$$\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}=\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

$$\mathrm{OR}=\frac{10\sqrt{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}=10\sqrt{3}.$$

$\boxed{4}$ (つづき)

直線 OR は $\angle$EOF の二等分線であり，その方向ベクトルは，

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{OE}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OE}}|}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{OF}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OF}}|}=\frac{1}{3}(1,\ 2,\ -2)+\frac{1}{5}(3,\ 0,\ 4)=\frac{2}{15}(7,\ 5,\ 1).$$

$\vec{u}=(7,\ 5,\ 1)$ とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|}{|\vec{u}|}\vec{u}=\frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{7^2+5^2+1^2}}(7,\ 5,\ 1)=(14,\ 10,\ 2).$$

よって，求める C の中心の座標は，

$$(14,\ 10,\ 2). \qquad \cdots(\text{答})$$

$\boxed{5}$

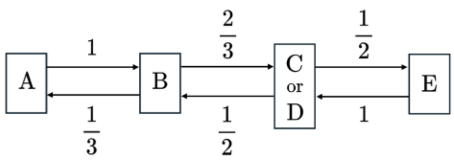
(1)

$$\mathrm{P}_n \text{ が} \begin{cases} \text{A である確率を } a_n \\ \text{B である確率を } b_n \\ \text{C または D である確率を } c_n \\ \text{E である確率を } e_n \end{cases}$$

とおく．これらの事象は互いに排反である．

n が奇数のとき，P_n は A または「C または D」，n が偶数のとき，P_n は B または E

である．また，確率の推移は以下のようになる．



条件より，$a_1 = b_2 = 1$ であり，m を自然数として，

$$\begin{aligned} a_{2m+1} &= 1 \cdot \frac{1}{3} a_{2m-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} c_{2m-1} \\ &= \frac{1}{3} a_{2m-1} + \frac{1}{6}(1 - a_{2m-1}) \qquad (a_{2m-1} + c_{2m-1} = 1 \text{ より}) \\ &= \frac{1}{6} a_{2m-1} + \frac{1}{6} \end{aligned}$$

よって，

$$a_{2m+1} - \frac{1}{5} = \frac{1}{6}\left(a_{2m-1} - \frac{1}{5}\right)$$

より，$\left\{a_{2m-1} - \frac{1}{5}\right\}$ は公比 $\frac{1}{6}$ の等比数列であるから，

$$a_{2m-1} - \frac{1}{5} = \left(a_1 - \frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^{m-1} = \frac{4}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^{m-1}$$

よって，

$$a_{2m-1} = \frac{1}{5} + \frac{4}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^{m-1}$$

$n = 2m - 1$ より，$m = \frac{n+1}{2}$ であるから，

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{5} + \frac{4}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{n-1}{2}} & (n \text{ が奇数}) \\ 0 & (n \text{ が偶数}) \end{cases}$$

一方，

$$\begin{aligned} b_{2m+2} &= \left(\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}\right) b_{2m} + 1 \cdot \frac{1}{2} e_{2m} \\ &= \frac{2}{3} b_{2m} + \frac{1}{2}(1 - b_{2m}) \qquad (b_{2m} + e_{2m} = 1 \text{ より}) \\ &= \frac{1}{6} b_{2m} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

よって，

$$b_{2m+2} - \frac{3}{5} = \frac{1}{6}\left(b_{2m} - \frac{3}{5}\right)$$

$\boxed{5}$ **（つづき１）**

より，$\left\{b_{2m}-\dfrac{3}{5}\right\}$ は公比 $\dfrac{1}{6}$ の等比数列であるから，

$$b_{2m}-\frac{3}{5}=\left(b_2-\frac{3}{5}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^{m-1}=\frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^{m-1}$$

よって，

$$b_{2m}=\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^{m-1}$$

$n=2m$ より，$m=\dfrac{n}{2}$ であるから，

$$b_n=\begin{cases}0 & (n\text{ が奇数})\\ \dfrac{3}{5}+\dfrac{2}{5}\left(\dfrac{1}{6}\right)^{\frac{n}{2}-1} & (n\text{ が偶数})\end{cases}$$

以上より，求める確率 p_n は，a_n+b_n であるから，

$$p_n=a_n+b_n=\begin{cases}\boldsymbol{\dfrac{1}{5}+\dfrac{4}{5}\left(\dfrac{1}{6}\right)^{\frac{n-1}{2}}} & (n\text{ が奇数})\\ \boldsymbol{\dfrac{3}{5}+\dfrac{2}{5}\left(\dfrac{1}{6}\right)^{\frac{n}{2}-1}} & (n\text{ が偶数})\end{cases}\qquad\cdots(\text{答})$$

(2)　事象 X,Y を，

$$\begin{cases}X:\mathrm{P}_n\text{ が A または B}\\ Y:k=1,2,\cdots,n\text{ のいずれに対しても},\mathrm{P}_k\text{ が E ではない}\end{cases}$$

と定めると，求める条件付き確率 q_n は，

$$q_n=P_X(Y)=\frac{P(X\cap Y)}{P(X)}=\frac{P(X\cap Y)}{p_n}$$

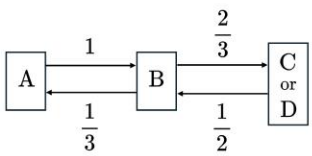
ここで，

$$\begin{cases}k=1,2,\cdots,n\text{ のいずれに対しても }\mathrm{P}_k\text{ が E ではなく},\mathrm{P}_n\text{ が A である確率を }A_n\\ k=1,2,\cdots,n\text{ のいずれに対しても }\mathrm{P}_k\text{ が E ではなく},\mathrm{P}_n\text{ が B である確率を }B_n\end{cases}$$

とおく．

n が奇数のとき，P_n は A または「C または D」，n が偶数のとき，P_n は B

である．また，確率の推移は以下のようになる．



条件より，$A_1=B_2=1$ であり，

$$\begin{aligned}B_{2m+2}&=\left(\frac{1}{3}\cdot1+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\right)B_{2m}\\&=\frac{2}{3}B_{2m}\end{aligned}$$

よって，$\{B_{2m}\}$ は公比 $\dfrac{2}{3}$ の等比数列で，

$$B_{2m}=B_2\left(\frac{2}{3}\right)^{m-1}=\left(\frac{2}{3}\right)^{m-1}$$

$\boxed{5}$ **（つづき２）**

$m=\dfrac{n}{2}$ より，

$$B_n=\begin{cases}0 & (n\text{ が奇数})\\ \left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{n}{2}-1} & (n\text{ が偶数})\end{cases}$$

また，

$$A_{2m+1}=\frac{1}{3}B_{2m}=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{m-1}\quad(m\geqq 1)$$

より，

$$A_{2m-1}=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{m-2}\quad(m\geqq 2)$$

これは $m=1$ のとき成立しないので，

$$A_n=\begin{cases}1 & (n=1)\\ \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{n-3}{2}} & (n\text{ が 3 以上の奇数})\\ 0 & (n\text{ が偶数})\end{cases}$$

したがって，

$$P(X\cap Y)=A_n+B_n=\begin{cases}1 & (n=1)\\ \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{n-3}{2}} & (n\text{ が 3 以上の奇数})\\ \left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{n}{2}-1} & (n\text{ が偶数})\end{cases}$$

以上より，求める確率 q_n は，

$$q_n=\begin{cases}\mathbf{1} & (n=1)\\ \dfrac{\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n-3}{2}}}{\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{n-1}{2}}} & (n\text{ が 3 以上の奇数})\\ \dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n}{2}-1}}{\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{n}{2}-1}} & (n\text{ が偶数})\end{cases}\qquad\cdots(\text{答})$$

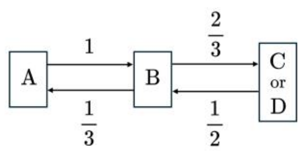
【$A_{2m-1}\ (m\geqq 2)$，B_{2m} を求める部分の別解】

$m\geqq 2$ のとき，

$$A_{2m-1}=1\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\right)^{m-2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{m-2}$$

また，$m\geqq 1$ のとき，

$$B_{2m}=1\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\right)^{m-1}=\left(\frac{2}{3}\right)^{m-1}$$



【$A_{2m-1}\ (m\geqq 2)$，B_{2m} を求める部分の別解終り】