[1] (1) 集合 $\{a_1, a_2, a_3\}$ が集合 $\{2, 5, 6\}$ と等しくなる組 (a_1, a_2, a_3) の決め方は，

3! 通りあるので，求める確率は，

$\left(\frac{1}{6}\right)^3 \times 3! = \frac{1}{36}$.

(2) $a_1 < a_2 < a_3$ となる組 (a_1, a_2, a_3) の決め方は，${}_6C_3$ 通りあるので，求める確率は，

$\left(\frac{1}{6}\right)^3 \times {}_6C_3 = \frac{5}{54}$.

(3) a_1, a_2, a_3 がすべて異なる組 (a_1, a_2, a_3) の決め方は，${}_6P_3$ 通りあるので，求める確率は，

$\left(\frac{1}{6}\right)^3 \times {}_6P_3 = \frac{5}{9}$.

(4) 集合 $\{a_1, a_2, a_3\}$ と集合 $\{2, 3\}$ が等しいという事象を A，$a_1 = 3$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$ であるという事象を B とする．

事象 A において，組 (a_1, a_2, a_3) は，

$(2,2,3)$, $(2,3,2)$, $(3,2,2)$, $(2,3,3)$
$(3,2,3)$, $(3,3,2)$ の 6 通りあるので，

$P(A) = \left(\frac{1}{6}\right)^3 \times 6 = \frac{1}{36}$.

また，$P(A \cap B) = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}$ である．

よって，求める条件付き確率は，

$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{6}$.

(5) $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} = 1$.

$1 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq 6$ とする．

このとき，$1 = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} \leqq \frac{3}{a_1}$ より，

$(1 \leqq)\ a_1 \leqq 3$.

(i) $a_1 = 1$ のとき，

$\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} = 0$ となり不適．

(ii) $a_1 = 2$ のとき，

$\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} = \frac{1}{2}$.

$2 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq 6$ より，

$\frac{1}{2} = \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} \leqq \frac{2}{a_2}$.

$\therefore\ (2 \leqq)\ a_2 \leqq 4$.

[I] $a_2 = 2$ のとき，

$\frac{1}{a_3} = 0$ となり不適．

[II] $a_2 = 3$ のとき，

$\frac{1}{a_3} = \frac{1}{6}$ より，$a_3 = 6$.

[III] $a_2 = 4$ のとき，

$\frac{1}{a_3} = \frac{1}{4}$ より，$a_3 = 4$.

(iii) $a_1 = 3$ のとき，

$\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} = \frac{2}{3}$.

$3 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq 6$ より，

$\frac{2}{3} = \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} \leqq \frac{2}{a_2}$.

$\therefore\ (3 \leqq)\ a_2 \leqq 3$.

よって，$a_2 = 3$ より $\frac{1}{a_3} = \frac{1}{3}$ なので，

$a_3 = 3$.

以上より，$1 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq 6$ としたとき，

$(a_1, a_2, a_3) = (2,3,6), (2,4,4), (3,3,3)$

である．

よって，$a_1 \leqq a_2 \leqq a_3$ 以外の場合も同様であるから，求める確率は，

$\left(\frac{1}{6}\right)^3 \times \left(3! + \frac{3!}{2!} + 1\right) = \frac{5}{108}$.

© 河合塾　2025 年

[2]　$f(x)=-x^3-3x^2+4$,
　　$g(x)=x^2+ax+b$

(1)　$f'(x)=-3x^2-6x$
　　　$=-3x(x+2)$

より，$f(x)$ の増減は次のようになる．

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	0	↗	4	↘

よって，
　極大値は，$f(0)=4$,
　極小値は，$f(-2)=0$.

(2)　C_1 と C_2 は，x 座標が t である共有点 P をもち，かつ点 P において共通接線をもつから，

$$\begin{cases} f(t)=g(t), \\ f'(t)=g'(t) \end{cases}$$

が成り立つ．

$g'(x)=2x+a$ であるから，
$f'(t)=g'(t)$ より，
　$-3t^2-6t=2t+a$.
　$a=-3t^2-8t$.　…①

$f(t)=g(t)$ より，
　$-t^3-3t^2+4=t^2+at+b$.
①より，
　$b=2t^3+4t^2+4$.

以上より，
　$a=-3t^2-8t$,
　$b=2t^3+4t^2+4$.

(3)　$F(t)=\int_0^1\{g(x)-f(x)\}dx$

$$=\int_0^1(x^3+4x^2+ax+b-4)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^3+\frac{4}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2+(b-4)x\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{2}a+b-\frac{29}{12}$$

(2)の結果より，

$$F(t)=\frac{1}{2}(-3t^2-8t)+(2t^3+4t^2+4)-\frac{29}{12}$$

$$=2t^3+\frac{5}{2}t^2-4t+\frac{19}{12}.$$

これより，
　$F'(t)=6t^2+5t-4$
　　$=(3t+4)(2t-1)$

であるから，$t>0$ における $F(t)$ の増減は次のようになる．

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$F'(t)$		$-$	0	$+$
$F(t)$		↘	$\frac{11}{24}$	↗

したがって，$F(t)$ の最小値は，

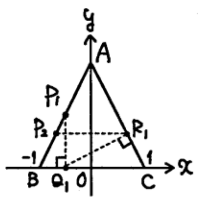
$$F\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{11}{24}.$$

© 河合塾　2025 年

［3］

(1) 直線Q_1R_1の方程式は

$$y=\frac{1}{a}(x-p)$$



であり，直線ACの方程式は

$$y=-ax+a$$

であるからこれらよりyを消去して

$$-ax+a=\frac{1}{a}(x-p)$$

$$x=\frac{a^2+p}{a^2+1}.$$

このとき $y=\dfrac{a-ap}{a^2+1}$ であるから

$$R_1\left(\frac{a^2+p}{a^2+1},\ \frac{a-ap}{a^2+1}\right).$$

(2) 条件E，Fを

E：「点P_1が線分AB上にある」

F：「点R_1は線分AC上にある」

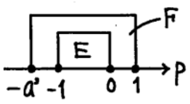
とする．$P_1(p,\ ap+a)$，$R_1\left(\dfrac{a^2+p}{a^2+1},\ \dfrac{a-ap}{a^2+1}\right)$において

E：$-1\leqq p\leqq 0$，

F：$0\leqq \dfrac{a^2+p}{a^2+1}\leqq 1$ つまり $-a^2\leqq p\leqq 1$．

E⇒Fが真となるようなaの値の範囲は

$$-a^2\leqq -1.$$



$$a^2\geqq 1.$$

$a>0$より

$$a\geqq 1.$$

(3) $P_n(x_n,\ ax_n+a)$に対して，(1)と同様の計算により

$R_n\left(\dfrac{a^2+x_n}{a^2+1},\ \dfrac{a-ax_n}{a^2+1}\right)$を得る．点$R_n$と点$P_{n+1}$は$y$軸に関して対称であるから

(点P_{n+1}のx座標) $=-$(点R_nのx座標)

つまり

$$x_{n+1}=-\frac{1}{a^2+1}x_n-\frac{a^2}{a^2+1}.$$

これより

$$x_{n+1}+\frac{a^2}{a^2+2}=\left(-\frac{1}{a^2+1}\right)\left(x_n+\frac{a^2}{a^2+2}\right).$$

したがって，数列$\left\{x_n+\dfrac{a^2}{a^2+2}\right\}$は公比$-\dfrac{1}{a^2+1}$の等比数列であるから

$$x_n+\frac{a^2}{a^2+2}=\left(x_1+\frac{a^2}{a^2+2}\right)\left(-\frac{1}{a^2+1}\right)^{n-1}$$

$$x_n=\left(p+\frac{a^2}{a^2+2}\right)\left(-\frac{1}{a^2+1}\right)^{n-1}-\frac{a^2}{a^2+2}.$$

(4) $a=2$，$p=0$より

$$x_n=\frac{2}{3}\left\{\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}-1\right\}$$

$$x_{n+1}-x_n=\frac{2}{3}\left\{\left(-\frac{1}{5}\right)^{n}-1\right\}-\frac{2}{3}\left\{\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}-1\right\}$$

$$=-\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$

$$=4\cdot(-5)^{-n}.$$

であるから

$$|x_{n+1}-x_n|<10^{-10}\quad\cdots(※)$$

$$|4\cdot(-5)^{-n}|<10^{-10}$$

$$4\cdot 5^{-n}<10^{-10}$$

$$\log_{10}4\cdot 5^{-n}<-10$$

$$2\log_{10}2-n(1-\log_{10}2)<-10$$

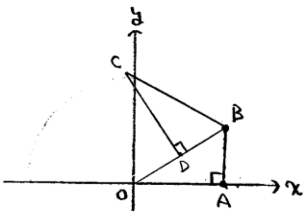
$$n>\frac{10+2\log_{10}2}{1-\log_{10}2}=\frac{10.6020}{0.6990}=15.167\cdots.$$

したがって(※)を満たす最小の自然数nは

$$n=16.$$

© 河合塾　2025 年

[4]



(1) $A(\cos\theta, 0)$, $B(\cos\theta, \sin\theta)$ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ より,

$$|\overrightarrow{OA}|=\cos\theta,\ |\overrightarrow{AB}|=\sin\theta,\ |\overrightarrow{OB}|=1.$$

よって,

$$|\overrightarrow{DB}|=|\overrightarrow{AB}|=\sin\theta$$

より,

$$|\overrightarrow{OD}|=|\overrightarrow{OB}|-|\overrightarrow{DB}|=1-\sin\theta.$$

したがって,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OD}&=(1-\sin\theta)\overrightarrow{OB}\\&=\left((1-\sin\theta)\cos\theta,\ (1-\sin\theta)\sin\theta\right)\\&=(\cos\theta-\sin\theta\cos\theta,\ \sin\theta-\sin^2\theta).\end{aligned}$$

(2) $$|\overrightarrow{DC}|=|\overrightarrow{OA}|=\cos\theta$$

より,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DC}&=\cos\theta\left(\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right),\ \sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right)\\&=\cos\theta(-\sin\theta,\ \cos\theta)\\&=(-\sin\theta\cos\theta,\ \cos^2\theta).\end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned}\overrightarrow{OC}&=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DC}\\&=(\cos\theta-2\sin\theta\cos\theta,\ \sin\theta-\sin^2\theta+\cos^2\theta)\end{aligned}$$

より,

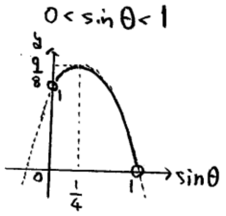
$$C(\cos\theta-2\sin\theta\cos\theta,\ \sin\theta-\sin^2\theta+\cos^2\theta).$$

よって,

$$\begin{aligned}f(\theta)&=\sin\theta-\sin^2\theta+\cos^2\theta\\&=-2\sin^2\theta+\sin\theta+1\\&=-2\left(\sin\theta-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{9}{8}\end{aligned}$$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ より,

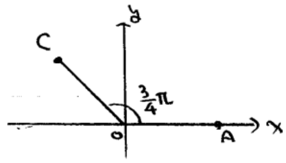
$$0<\sin\theta<1$$



したがって,

$$0<f(\theta)\leqq\frac{9}{8}.$$

(4)



$C(\cos\theta-2\sin\theta\cos\theta,\ \sin\theta-\sin^2\theta+\cos^2\theta)$ より,

$\angle AOC=\frac{3}{4}\pi$ のとき,

$$\begin{aligned}&-(\cos\theta-2\sin\theta\cos\theta)=\sin\theta-\sin^2\theta+\cos^2\theta\\&-\cos\theta+\sin2\theta=\sin\theta+\cos2\theta\\&\sin2\theta-\sin\theta=\cos2\theta+\cos\theta\\&2\sin\theta\cos\theta-\sin\theta=2\cos^2\theta+\cos\theta-1\\&\sin\theta(2\cos\theta-1)=(2\cos\theta-1)(\cos\theta+1)\\&(2\cos\theta-1)(\sin\theta-\cos\theta-1)=0\end{aligned}$$

$$\cos\theta=\frac{1}{2},\ \text{または}\ \sin\theta-\cos\theta=1$$

$\cos\theta=\frac{1}{2}$ のとき, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ より

$$\theta=\frac{\pi}{3}$$

$\sin\theta-\cos\theta=1$ のとき,

$$\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=1$$

$$\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\ \cdots ①$$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ より

$$-\frac{\pi}{4}<\theta-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}$$

となるから,

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}<\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)<\frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって, ①をみたす θ は存在しない.

以上より,

$$\theta=\frac{\pi}{3}.$$

© 河合塾　2025 年