[1]

(1) $f(x)=\dfrac{\log x}{\sqrt{x}}$ $(x>0)$ より,

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot\sqrt{x}-(\log x)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}$$

$$=\frac{\sqrt{x}\,(2-\log x)}{2x^2}$$

よって, $f(x)$ の増減は次のようになる.

x	(0)	$\cdots$	e^2	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	最大	$\searrow$

したがって,

最大値 $f(e^2)=\dfrac{2}{e}$

(2) 以下, C は積分定数とする.

$$\int \log x\,dx = x\log x - x + C,$$

$$\int (\log x)^2 dx = x(\log x)^2-\int x\cdot 2(\log x)\cdot\frac{1}{x}\,dx$$

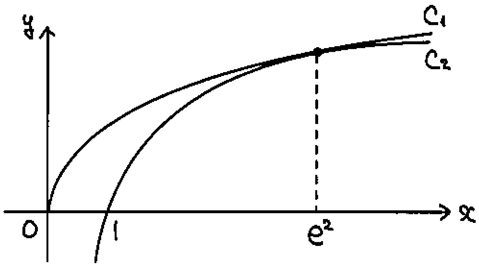
$$=x(\log x)^2-2x\log x+2x+C$$

(3) $x>0$ において,

$$a\sqrt{x}-\log x=\sqrt{x}\,\{a-f(x)\}\geqq 0$$

（等号は $x=e^2$ のとき成り立つ）

であるから, C_1, C_2 の位置関係は次図のようになる.



よって,

$$V=\int_0^{e^2}\pi\left(\frac{2}{e}\sqrt{x}\right)^2dx-\int_1^{e^2}\pi(\log x)^2dx$$

$$=\left\{\left[\frac{2}{e^2}x^2\right]_0^{e^2}-\Big[x(\log x)^2-2x\log x+2x\Big]_1^{e^2}\right\}\pi$$

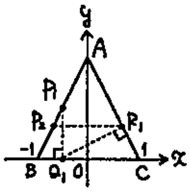
$$=\{2e^2-(2e^2-2)\}\pi$$

$$=2\pi$$

[2]

(1) 直線QR_1の方程式は

$$y=\frac{1}{a}(x-p)$$



であり，直線ACの方程式は

$$y=-ax+a$$

であるからこれらよりyを消去して

$$-ax+a=\frac{1}{a}(x-p)$$

$$x=\frac{a^2+p}{a^2+1}.$$

このとき$y=\dfrac{a-ap}{a^2+1}$であるから

$$R_1\left(\frac{a^2+p}{a^2+1},\ \frac{a-ap}{a^2+1}\right).$$

(2) 条件E，Fを

E：「点P_1が線分AB上にある」

F：「点R_1は線分AC上にある」

とする．$P_1(p,\ ap+a)$，$R_1\left(\dfrac{a^2+p}{a^2+1},\ \dfrac{a-ap}{a^2+1}\right)$において

E：$-1\leqq p\leqq 0$，

F：$0\leqq\dfrac{a^2+p}{a^2+1}\leqq 1$　つまり$-a^2\leqq p\leqq 1$．

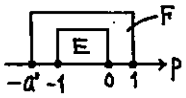
E ⇒ F が真となるようなaの値の範囲は

$$-a^2\leqq -1.$$

$$a^2\geqq 1.$$

$a>0$より

$$a\geqq 1.$$



(3) $P_n(x_n,\ ax_n+a)$に対して，(1)と同様の計算により$R_n\left(\dfrac{a^2+x_n}{a^2+1},\ \dfrac{a-ax_n}{a^2+1}\right)$を得る．点$R_n$と点$P_{n+1}$は$y$軸に関して対称であるから

（点P_{n+1}のx座標）$=-$（点R_nのx座標）

つまり

$$x_{n+1}=-\frac{1}{a^2+1}x_n-\frac{a^2}{a^2+1}.$$

これより

$$x_{n+1}+\frac{a^2}{a^2+2}=\left(-\frac{1}{a^2+1}\right)\left(x_n+\frac{a^2}{a^2+2}\right).$$

したがって，数列$\left\{x_n+\dfrac{a^2}{a^2+2}\right\}$は公比$-\dfrac{1}{a^2+1}$の等比数列であるから

$$x_n+\frac{a^2}{a^2+2}=\left(x_1+\frac{a^2}{a^2+2}\right)\left(-\frac{1}{a^2+1}\right)^{n-1}$$

$$x_n=\left(p+\frac{a^2}{a^2+2}\right)\left(-\frac{1}{a^2+1}\right)^{n-1}-\frac{a^2}{a^2+2}.$$

(4) $a=2$，$p=0$より

$$x_n=\frac{2}{3}\left\{\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}-1\right\}$$

$$x_{n+1}-x_n=\frac{2}{3}\left\{\left(-\frac{1}{5}\right)^{n}-1\right\}-\frac{2}{3}\left\{\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}-1\right\}$$

$$=-\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$

$$=4\cdot(-5)^{-n}.$$

であるから

$$|x_{n+1}-x_n|<10^{-10}\qquad\cdots(※)$$

$$|4\cdot(-5)^{-n}|<10^{-10}$$

$$4\cdot 5^{-n}<10^{-10}$$

$$\log_{10}4\cdot 5^{-n}<-10$$

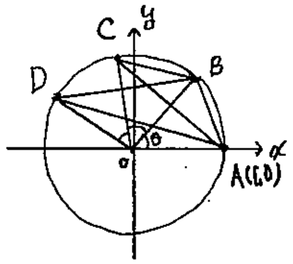
$$2\log_{10}2-n(1-\log_{10}2)<-10$$

$$n>\frac{10+2\log_{10}2}{1-\log_{10}2}=\frac{10.6020}{0.6990}=15.167\cdots.$$

したがって(※)を満たす最小の自然数nは

$$n=16.$$

[3]



(1) $S(\theta) = \frac{1}{2}\sin 3\theta$

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{\theta} = \lim_{\theta\to+0}\frac{3}{2}\cdot\frac{\sin 3\theta}{3\theta}$$
$$= \frac{3}{2}\cdot 1$$
$$= \frac{3}{2}.$$

(2) $T(\theta) = 2\triangle OAB - \triangle OAC$
$$= 2\cdot\frac{1}{2}\sin\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta$$
$$= \sin\theta - \sin\theta\cos\theta$$

$$\frac{T(\theta)}{\theta^3} = \frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}$$
$$= \frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}\cdot\frac{1}{1+\cos\theta}$$
$$= \left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^3\cdot\frac{1}{1+\cos\theta}.$$

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{T(\theta)}{\theta^3} = 1\cdot\frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{2}.$$

(3) $U(\theta) = \triangle OAB + \triangle OBD - \triangle OAD$
$$= \frac{1}{2}\sin\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta - \frac{1}{2}\sin 3\theta$$

$$\frac{U(\theta)}{\sin\theta} = \frac{\sin\theta + \sin 2\theta - \sin 3\theta}{2\sin\theta}$$
$$= \frac{\sin\theta + 2\sin\theta\cos\theta - 3\sin\theta + 4\sin^3\theta}{2\sin\theta}$$
$$= 2\sin^2\theta + \cos\theta - 1$$
$$= 2(1-t^2) + t - 1$$
$$= -2t^2 + t + 1.$$

(4) $f(\theta) = \dfrac{T(\theta)}{U(\theta)}$
$$= \frac{T(\theta)}{\sin\theta}\cdot\frac{1}{\frac{U(\theta)}{\sin\theta}}$$
$$= (1-t)\cdot\frac{1}{-2t^2+t+1}$$
$$= \frac{1}{2t+1}.$$

$\theta\to+0$ のとき，$t\to 1-0$ であるから

$$\lim_{\theta\to+0} f(\theta) = \lim_{t\to 1-0}\frac{1}{2t+1}$$
$$= \frac{1}{3}.$$

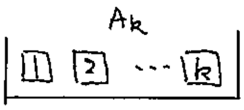
θ が $0<\theta<\frac{\pi}{3}$ の範囲を動くとき，

t は $\frac{1}{2}<t<1$ の範囲を動く．

よって，$f(\theta) = \dfrac{1}{2t+1}$ のとり得る値の範囲は

$$\frac{1}{3} < f(\theta) < \frac{1}{2}.$$

〔4〕



(1) A_{3n+1} のカードの数の和は

$$S=1+2+3+\cdots+(3n+1)=\frac{(3n+1)(3n+2)}{2}.$$

よって

$$L=\frac{S}{3n+1}=\frac{3n+2}{2}.$$

(2) $A_1, A_2, \cdots, A_{3n+1}$ のカードの総枚数は $T=\sum_{k=1}^{3n+1}k=\frac{(3n+1)(3n+2)}{2}$.

A_k のカードの数の和は

$$U_k=1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}.$$

よって, $A_1, A_2, \cdots, A_{3n+1}$ のカードの数の和は

$$V=\sum_{k=1}^{3n+1}U_k=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3n+1}k(k+1)$$

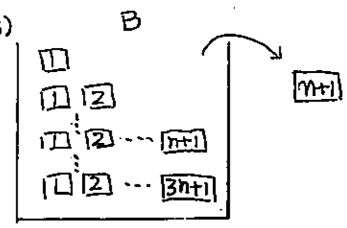
$$=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{3n+1}\{k(k+1)(k+2)-(k-1)k(k+1)\}$$

$$=\frac{1}{6}(3n+1)(3n+2)(3n+3).$$

よって,

$$M=\frac{V}{T}=n+1.$$

(3)

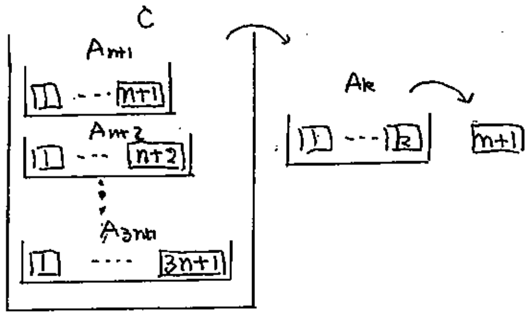


B のカードの枚数は $W=T$.

B には $(n+1)$ のカードが $2n+1$ 枚あるから,

$$p(n)=\frac{2n+1}{W}=\frac{2(2n+1)}{(3n+1)(3n+2)}.$$

(4)



取り出されたカードが $M(=n+1)$ である事象を E, 取り出されたカードが A_{3n+1} からである事象を F とする.

C から1つの箱を取り出す確率は $\frac{1}{2n+1}$ であり, $n+1$ のカードはどの箱にも1枚ずつ入っているから,

$$P(E)=\frac{1}{2n+1}\cdot\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{n+k}.$$

$$P(E\cap F)=\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1}{3n+1}.$$

よって,

$$Q(n)=\frac{P(E\cap F)}{P(E)}=\frac{\frac{1}{3n+1}}{\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{n+k}}.$$

$$\lim_{n\to\infty}nQ(n)=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot\frac{1}{3n+1}}{\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{n+k}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3+\frac{1}{n}}}{\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{n+2n+1}}$$

$$=\frac{\frac{1}{3}}{\int_0^2\frac{1}{1+x}dx+0}=\frac{\frac{1}{3}}{\left[\log(1+x)\right]_0^2}$$

$$=\frac{1}{3\log 3}.$$

[5]

(1) $z_{n+1} = 2(z_n - i)^2 + i$ $(n=1,2,3,\cdots)$ …①

より，

$$z_2 - i = 2(\sqrt{3}+i)^2$$
$$= 2\left\{2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right\}^2$$
$$= 8\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$
$$z_3 - i = 2\left\{2^3\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right\}^2$$
$$= 128\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right).$$

(2) $z_n - i = r_n(\cos\theta_n + i\sin\theta_n)$

のとき，①より，

$$z_{n+1} - i = 2r_n^2(\cos 2\theta_n + i\sin 2\theta_n) \quad \cdots②$$

よって，

$$r_{n+1} = 2r_n^2$$

だから，$r_1 = 2$ より つねに $r_n > 0$ であり，

$$\log_2 r_{n+1} = \log_2 2r_n^2$$
$$= 1 + 2\log_2 r_n$$

これは，

$$\log_2 r_{n+1} + 1 = 2(\log_2 r_n + 1)$$

と変形できるから，数列 $\{\log_2 r_n + 1\}$ は，初項：$\log_2 r_1 + 1 = 2$，公比 2 の等比数列である．

したがって，

$$\log_2 r_n + 1 = 2^n$$
$$\log_2 r_n = 2^n - 1.$$

(3) (2)の結果より，

$$r_n = 2^{2^n-1}.$$

また，②より，

$$\theta_{n+1} = 2\theta_n$$

だから，数列 $\{\theta_n\}$ は，初項 $\theta_1 = \frac{\pi}{6}$，公比 2 の等比数列である．よって，

$$\theta_n = \frac{\pi}{6}\cdot 2^{n-1}$$
$$= \frac{2^{n-2}}{3}\pi.$$

したがって，

$$z_n - i = 2^{2^n-1}\left\{\cos\left(\frac{2^{n-2}}{3}\right)\pi + i\sin\left(\frac{2^{n-2}}{3}\right)\pi\right\}$$
$$z_n = 2^{2^n-1}\left\{\cos\left(\frac{2^{n-2}}{3}\right)\pi + i\sin\left(\frac{2^{n-2}}{3}\right)\pi\right\} + i.$$

(4) $z_3 = 2^7\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right) + i,$ …③

$$z_5 = 2^{31}\left(\cos\frac{8}{3}\pi + i\sin\frac{8}{3}\pi\right) + i$$
$$= 2^{31}\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right) + i \quad \cdots④$$
$$z_{2025} = 2^{2^{2025}-1}\left\{\cos\left(\frac{2^{2023}}{3}\right)\pi + i\sin\left(\frac{2^{2023}}{3}\right)\pi\right\} + i$$

ここで，

$$\frac{2^{2023}}{3} - \frac{2}{3}$$
$$= \frac{2}{3}(2^{2022} - 1)$$
$$= \frac{2}{3}(4^{1011} - 1)$$
$$= \frac{2}{3}(4-1)(4^{1010} + 4^{1009} + 4^{1008} + \cdots + 4 + 1)$$
$$= 2(4^{1010} + 4^{1009} + 4^{1008} + \cdots + 4 + 1)$$
$$= 2M \quad (M：整数)$$

より，

$$z_{2025} = 2^{2^{2025}-1}\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right) + i \quad \cdots⑤$$

となる．③,④,⑤より，

$$\frac{z_{2025} - z_3}{z_5 - z_3}$$
$$= \frac{\left(2^{2^{2025}-1} - 2^8\right)\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right)}{\left(2^{31} - 2^8\right)\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right)}$$
$$= \frac{2^{2^{2025}-1} - 2^8}{2^{31} - 2^8} = 実数.$$

したがって，3 点 $P_3(z_3)$, $P_5(z_5)$, $P_{2025}(z_{2025})$ は一直線上にある．