$\boxed{1}$ (1) $f(x)=x^3-6x^2-15x+30$ のとき

$$f'(x)=3x^2-12x-15$$
$$=3(x+1)(x-5).$$

これより, $f(x)$ の増減は次のようになる.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	5	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	38	$\searrow$	-70	$\nearrow$

よって，$f(x)$ が

極大値をとるような x は $\boxed{-1}$,　　…(答)

極小値をとるような x は $\boxed{5}$.　　…(答)

さらに，$f(x)$ は

極大値 $\boxed{38}$, 極小値 $\boxed{-70}$　　…(答)

をとる.

(2) C 上の点 $(t,\ f(t))$ における C の接線の方程式は

$$y=(3t^2-12t-15)(x-t)+t^3-6t^2-15t+30.$$
$$y=3(t^2-4t-5)x-2t^3+6t^2+30.$$

これが点 $(-3,\ -6)$ を通るとき

$$-6=-9(t^2-4t-5)-2t^3+6t^2+30.$$
$$2t^3+3t^2-36t-81=0.$$
$$(t+3)^2(2t-9)=0.$$
$$t=-3,\ \frac{9}{2}.$$

よって，求める直線の方程式は

$$\boxed{y=48x+138,\ y=-\frac{33}{4}x-\frac{123}{4}}.$$　　…(答)

2

$$2 \leqq a < b < c \leqq 6. \quad \cdots ①$$

①を満たす整数 $(a,\ b,\ c)$ は

$$\begin{aligned}(a,\ b,\ c) =&(2,\ 3,\ 4),\ (2,\ 3,\ 5),\ (2,\ 3,\ 6),\\ &(2,\ 4,\ 5),\ (2,\ 4,\ 6),\\ &(2,\ 5,\ 6),\\ &(3,\ 4,\ 5),\ (3,\ 4,\ 6),\\ &(3,\ 5,\ 6),\\ &(4,\ 5,\ 6)\end{aligned}$$

の 10 組である．

(1) ①を満たすすべての整数 $a,\ b,\ c$ について $a+b$ の値を表にすると次のようになる．

a	b	c	$a+b$
2	3	4	5
2	3	5	5
2	3	6	5
2	4	5	6
2	4	6	6
2	5	6	7
3	4	5	7
3	4	6	7
3	5	6	8
4	5	6	9

この中で，$a+b>c$ を満たすものは

$$(a,b,c) = \boxed{(2,3,4),(2,4,5),(2,5,6),(3,4,5),(3,4,6),(3,5,6),(4,5,6)}.$$

…（答）

(2) ①を満たすすべての整数 $a,\ b,\ c$ について $a^2+b^2,\ c^2$ の値を表にすると次のようになる．

a	b	c	a^2+b^2	c^2
2	3	4	13	16
2	3	5	13	25
2	3	6	13	36
2	4	5	20	25
2	4	6	20	36
2	5	6	29	36
3	4	5	25	25
3	4	6	25	36
3	5	6	34	36
4	5	6	41	36

この中で，$a^2+b^2 \geqq c^2$ を満たすものは

$$(a,\ b,\ c) = \boxed{(3,\ 4,\ 5),\ (4,\ 5,\ 6)}. \quad \cdots（答）$$

(3) (2) で求めた

$$(a,\ b,\ c) = (3,\ 4,\ 5),\ (4,\ 5,\ 6)$$

はともに (1) の条件を満たすので，それぞれにおいて $a,\ b,\ c$ を 3 辺の長さとする三角形が存在する．

余弦定理より

$$\cos\angle\mathrm{ACB} = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

であるから

・$(a,\ b,\ c)=(3,\ 4,\ 5)$ のとき

$$\begin{aligned}\cos\angle\mathrm{ACB} &= \frac{3^2+4^2-5^2}{2\cdot3\cdot4}\\ &= \boxed{0}. \quad \cdots（答）\end{aligned}$$

・$(a,\ b,\ c)=(4,\ 5,\ 6)$ のとき

$$\begin{aligned}\cos\angle\mathrm{ACB} &= \frac{4^2+5^2-6^2}{2\cdot4\cdot5}\\ &= \boxed{\frac{1}{8}}. \quad \cdots（答）\end{aligned}$$

$\boxed{3}$ $a_1=1,\ a_2=3,$ $\cdots$①

$(n+1)a_{n+2}-(2n+3)a_{n+1}+(n+2)a_n=0.$ $\cdots$②

(1) ②より

$$(n+1)a_{n+2}=(2n+3)a_{n+1}-(n+2)a_n.$$

$$a_{n+2}=\frac{(2n+3)a_{n+1}-(n+2)a_n}{n+1}.$$

$b_n=a_{n+1}-a_n$ とおくと

$$\begin{aligned}b_{n+1}&=a_{n+2}-a_{n+1}\\&=\frac{(2n+3)a_{n+1}-(n+2)a_n}{n+1}-a_{n+1}\\&=\frac{(n+2)a_{n+1}-(n+2)a_n}{n+1}\\&=\frac{n+2}{n+1}(a_{n+1}-a_n)\\&=\frac{n+2}{n+1}b_n\end{aligned}$$ $\cdots$③

となる．（証明終り）

(2) ①より

$$b_1=a_2-a_1=2.$$

③の両辺を $n+2$ で割ると

$$\frac{1}{n+2}b_{n+1}=\frac{1}{n+1}b_n$$

であるから，$c_n=\frac{1}{n+1}b_n$ とおくと

$$c_{n+1}=c_n.$$

よって

$$c_n=c_{n-1}=\cdots=c_1.$$

ここで

$$c_1=\frac{1}{2}b_1=1$$

であるから

$$c_n=1\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots).$$

$c_n=\frac{1}{n+1}b_n$ より

$$b_n=n+1$$

であり，$b_n=a_{n+1}-a_n$ より

$$a_{n+1}-a_n=n+1.$$

$n\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}a_n&=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)\\&=1+\frac{1}{2}n(n-1)+n-1\\&=\frac{n(n+1)}{2}.\end{aligned}$$

これは $n=1$ のときにも成り立つ．

よって

$$a_n=\boxed{\frac{n(n+1)}{2}}.$$ $\cdots$（答）

(3) (2) より

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{225}\frac{1}{a_n}&=\sum_{n=1}^{225}\frac{2}{n(n+1)}\\&=2\sum_{n=1}^{225}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\&=2\left(1-\frac{1}{226}\right)\\&=\boxed{\frac{225}{113}}.\end{aligned}$$ $\cdots$（答）

$\boxed{4}$

$$f(nx)=\{f(x)\}^n, \qquad \cdots①$$
$$f(1)=2. \qquad \cdots②$$

(1)　①において $x=1$ とおくと，②より

$$f(n)=\{f(1)\}^n$$
$$=2^n$$

であるから，$f(n) \leqq 100$ となるのは

$$2^n \leqq 100$$

を満たすときである．ここで

$$2^6=64<100, \quad 2^7=128>100$$

であるから，$f(n) \leqq 100$ となるような最大の整数は

$$n=\boxed{6}. \qquad \cdots(答)$$

(2)　①より

$$f(x)=f\left(2\cdot\frac{x}{2}\right)$$
$$=\left\{f\left(\frac{x}{2}\right)\right\}^2.$$

ここで，$f\left(\frac{x}{2}\right)$ は 0 でない実数であるから

$$\left\{f\left(\frac{x}{2}\right)\right\}^2>0$$

より

$$f(x)>0. \qquad (証明終り)$$

(3)　①において $x=\frac{1}{n}$ とすると

$$f(1)=\left\{f\left(\frac{1}{n}\right)\right\}^n.$$

②より

$$2=\left\{f\left(\frac{1}{n}\right)\right\}^n.$$
$$f\left(\frac{1}{n}\right)=2^{\frac{1}{n}}. \qquad \cdots③$$

よって

$$f(0.25)=f\left(\frac{1}{4}\right)$$
$$=\boxed{2^{\frac{1}{4}}}. \qquad \cdots(答)$$

(4)　a は有理数なので，整数 l, m を用いて

$$a=\frac{l}{m}$$

と表せる．①において $n=l$, $x=\frac{1}{m}$ とすると，③より

$$f(a)=\left\{f\left(\frac{1}{m}\right)\right\}^l$$
$$=\left(2^{\frac{1}{m}}\right)^l$$
$$=2^{\frac{l}{m}}$$
$$=\boxed{2^a}. \qquad \cdots(答)$$