$\boxed{1}$

$$b_n = \log_{a_n}(a_{n+1}). \quad \cdots①$$

(1)　数列 $\{a_n\}$ は，初項 $a_1 = \alpha$，公比 r の等比数列なので

$$a_n = \alpha r^{n-1}. \quad \cdots②$$

このとき，$\alpha > 1$，$r > 1$ であり

$$a_n > 1,\ a_{n+1} > 1$$

であるから，①, ②より

$$\begin{aligned} b_n &= \log_{a_n}(a_{n+1}) \\ &= \frac{\log_\alpha a_{n+1}}{\log_\alpha a_n} \\ &= \frac{\log_\alpha \alpha r^n}{\log_\alpha \alpha r^{n-1}} \\ &= \frac{\log_\alpha r^n + \log_\alpha \alpha}{\log_\alpha r^{n-1} + \log_\alpha \alpha} \\ &= \boxed{\frac{n\log_\alpha r + 1}{(n-1)\log_\alpha r + 1}}. \end{aligned} \quad \cdots(答)$$

(2)　等式

$$b_n = \frac{n+2}{n+1} \quad \cdots③$$

がすべての自然数 n について成り立つとき，$n = 1$ について

$$b_1 = \frac{3}{2}$$

が成り立つ．このとき，(1) の結果より

$$\begin{aligned} \log_\alpha r + 1 &= \frac{3}{2}. \\ \log_\alpha r &= \frac{1}{2}. \\ r &= \alpha^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad \cdots④$$

逆に，④が成り立つとき，(1) の結果を用いると，すべての自然数 n について

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{n\cdot\frac{1}{2}+1}{(n-1)\cdot\frac{1}{2}+1} \\ &= \frac{n+2}{n+1}. \end{aligned}$$

よって，求める必要十分条件は

$$\boxed{r = \alpha^{\frac{1}{2}}}. \quad \cdots(答)$$

(3)　(2) の条件が成り立つとき，②より

$$\begin{aligned} a_n &= \alpha\cdot(\alpha^{\frac{1}{2}})^{n-1} \\ &= \alpha^{\frac{n+1}{2}} \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} a_1a_2 &= \alpha\cdot\alpha^{\frac{3}{2}} \\ &= \alpha^{\frac{5}{2}}, \\ a_1a_2a_3 &= \alpha\cdot\alpha^{\frac{3}{2}}\cdot\alpha^2 \\ &= \alpha^{\frac{9}{2}}, \\ a_1a_2a_3a_4 &= \alpha\cdot\alpha^{\frac{3}{2}}\cdot\alpha^2\cdot\alpha^{\frac{5}{2}} \\ &= \alpha^7. \end{aligned}$$

積 a_1a_2，$a_1a_2a_3$，$a_1a_2a_3a_4$ の整数部分がそれぞれ 2 桁，3 桁，4 桁になるとき

$$\begin{cases} 10^1 \leqq \alpha^{\frac{5}{2}} < 10^2, \\ 10^2 \leqq \alpha^{\frac{9}{2}} < 10^3, \\ 10^3 \leqq \alpha^7 < 10^4 \end{cases}$$

であり，これを解くと

$$\begin{cases} 10^{\frac{2}{5}} \leqq \alpha < 10^{\frac{4}{5}}, \\ 10^{\frac{4}{9}} \leqq \alpha < 10^{\frac{2}{3}}, \\ 10^{\frac{3}{7}} \leqq \alpha < 10^{\frac{4}{7}}. \end{cases}$$

これらと $\alpha > 1 = 10^0$ の共通範囲を考えると

$$\frac{2}{5} < \frac{3}{7} < \frac{4}{9} < \frac{4}{7} < \frac{2}{3} < \frac{4}{5}$$

より，求める α の範囲は

$$\boxed{10^{\frac{4}{9}} \leqq \alpha < 10^{\frac{4}{7}}}. \quad \cdots(答)$$

＜(2) の別解＞

等式

$$b_n = \frac{n+2}{n+1} \quad \cdots③$$

は，(1) の結果より

$$\frac{n\log_\alpha r + 1}{(n-1)\log_\alpha r + 1} = \frac{n+2}{n+1}$$

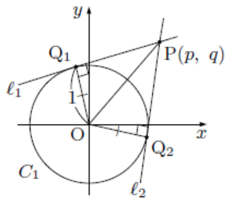
と同値であり，この等式を整理すると

$$\begin{aligned} (n^2+n)\log_\alpha r + n + 1 &= (n^2+n-2)\log_\alpha r + n + 2. \\ 2\log_\alpha r &= 1. \\ \log_\alpha r &= \frac{1}{2}. \\ r &= \alpha^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

したがって，すべての自然数 n に対して③が成り立つための必要十分条件は

$$\boxed{r = \alpha^{\frac{1}{2}}}. \quad \cdots(答)$$

$\boxed{2}$ (1)



$$\angle \mathrm{OQ_1P} = \frac{\pi}{2},\ \mathrm{OQ_1} = 1,\ \mathrm{OP} = \sqrt{p^2+q^2}$$

であり，三平方の定理より

$$\mathrm{PQ_1} = \sqrt{p^2+q^2-1}.$$

これより，$\triangle\mathrm{OPQ_1}$ の面積は

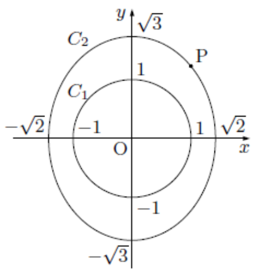
$$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{p^2+q^2-1}\cdot 1 = \frac{1}{2}\sqrt{p^2+q^2-1}.$$

さらに，$\triangle\mathrm{OPQ_1} \equiv \triangle\mathrm{OPQ_2}$ より，求める面積は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\sqrt{p^2+q^2-1}\cdot 2 \\ &= \boxed{\sqrt{p^2+q^2-1}}. \end{aligned}$$

…（答）

(2)



点 P が C_2 上を動くとき，$p^2+q^2>1$ を満たす．

$\dfrac{p^2}{2}+\dfrac{q^2}{3}=1$ より

$$q^2 = 3-\frac{3p^2}{2}.$$

これを (1) の結果に代入すると

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{p^2+3-\frac{3p^2}{2}-1} \\ &= \sqrt{-\frac{p^2}{2}+2}. \end{aligned}$$

ここで，点 P が C_2 上を動くとき

$$-\sqrt{2} \leqq p \leqq \sqrt{2}$$

であるから，S は

$p=0$ のとき最大値 $\boxed{\sqrt{2}}$,　…（答）

$p=\pm\sqrt{2}$ のとき最小値 $\boxed{1}$　…（答）

をとる．

$\boxed{3}$
$$I(a,n)=\int_0^{2\pi} e^{ax}\sin(nx)\,dx.$$

(1)　まず，不定積分
$$\int e^{ax}\sin(nx)\,dx$$
を計算すると
$$\begin{aligned}&\int e^{ax}\sin(nx)\,dx\\&=-\frac{1}{n}e^{ax}\cos(nx)+\frac{a}{n}\int e^{ax}\cos(nx)\,dx\\&=-\frac{1}{n}e^{ax}\cos(nx)+\frac{a}{n^2}e^{ax}\sin(nx)\\&\qquad\qquad-\frac{a^2}{n^2}\int e^{ax}\sin(nx)\,dx\end{aligned}$$
であるから
$$\int e^{ax}\sin(nx)\,dx=\frac{1}{n^2+a^2}e^{ax}\left\{a\sin(nx)-n\cos(nx)\right\}+C.$$
(C：積分定数)

よって
$$\begin{aligned}I(a,n)&=\frac{1}{n^2+a^2}\Big[e^{ax}\left\{a\sin(nx)-n\cos(nx)\right\}\Big]_0^{2\pi}\\&=\boxed{\frac{n}{n^2+a^2}(1-e^{2a\pi})}.\end{aligned}$$
…(答)

(2)　$a_n=\dfrac{\log n}{2\pi}$ のとき，(1) より
$$\begin{aligned}I(a_n,n)&=\frac{n}{n^2+a_n^2}(1-e^{2a_n\pi})\\&=\frac{n}{n^2+\dfrac{(\log n)^2}{4\pi^2}}(1-e^{\log n})\\&=\frac{n(1-n)}{n^2+\dfrac{(\log n)^2}{4\pi^2}}\\&=\frac{\dfrac{1}{n}-1}{1+\dfrac{1}{4\pi^2}\cdot\left(\dfrac{\log n}{n}\right)^2}.\end{aligned}$$
ここで $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n}=0$ であるから，求める極限は
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}I(a_n,n)&=\frac{0-1}{1+0}\\&=\boxed{-1}.\end{aligned}$$
…(答)

$\boxed{4}$

$$a|z-1| = |(a-2)z+a|. \qquad \cdots①$$

(1)　$a>0$ のとき，①より

$$a^2|z-1|^2 = |(a-2)z+a|^2.$$

$$a^2(z-1)\overline{(z-1)} = \{(a-2)z+a\}\overline{\{(a-2)z+a\}}.$$

$$a^2(z-1)(\overline{z}-1) = \{(a-2)z+a\}\{(a-2)\overline{z}+a\}.$$

$$4(a-1)z\overline{z} - 2a(a-1)(z+\overline{z}) = 0.$$

$a \fallingdotseq 1$ より

$$z\overline{z} - \frac{a}{2}(z+\overline{z}) = 0.$$

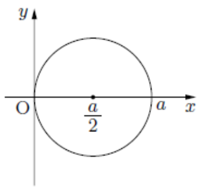
$$\left(z-\frac{a}{2}\right)\overline{\left(z-\frac{a}{2}\right)} = \frac{a^2}{4}.$$

$$\left|z-\frac{a}{2}\right|^2 = \frac{a^2}{4}.$$

$a>0$ より

$$\left|z-\frac{a}{2}\right| = \frac{a}{2}.$$

よって，①を満たす全体の集合を複素数平面上に図示すると，中心 $\frac{a}{2}$, 半径 $\frac{a}{2}$ の円となる．



…（答）

(2)

$$|z|^2 = 6-a. \qquad \cdots②$$

②において

（ア）$a>6$ のとき，②を満たす z は存在しない．

（イ）$a=6$ のとき，②を満たす z は原点を表す．

（ウ）$0<a<6$ のとき，②を満たす z は中心 0, 半径 $\sqrt{6-a}$ の円を表す．

(i)　$a=1$ のとき

①は

$$|z-1| = |-z+1|$$

であり，これを満たす z は複素数平面全体を動く．

さらに，②を満たす z は中心 0, 半径 $\sqrt{5}$ の円を表すので，①と②をともに満たす z は存在する．

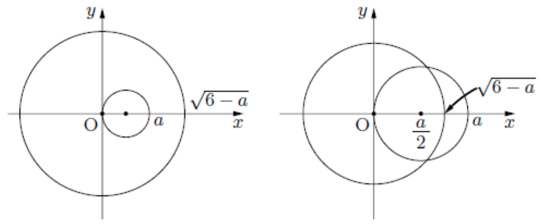
(ii)　$a>0$ かつ $a \fallingdotseq 1$ のとき

②と (1) の結果より

（ア）のとき，①と②をともに満たす z は存在しない．

（イ）のとき，①と②をともに満たす z は存在する．

（ウ）のとき，$0<a<6$ かつ $a \fallingdotseq 1$ で，2 円の中心 0, $\frac{a}{2}$ はどちらも実軸上にあり，さらに①の表す円が②の表す円の中心を通ることから，①と②をともに満たす z が存在する条件は



$$\sqrt{6-a} \leqq a.$$

左辺，右辺ともに正であるから両辺を 2 乗して整理すると

$$a^2+a-6 \geqq 0.$$

$$(a+3)(a-2) \geqq 0.$$

$$a \leqq -3,\ 2 \leqq a.$$

$0<a<6$, $a \fallingdotseq 1$ より

$$2 \leqq a < 6.$$

以上 (i), (ii) より，求める a の範囲は

$$\boxed{a=1,\ 2 \leqq a \leqq 6}. \qquad \cdots（答）$$

(注)

$$\left|\frac{a}{2}-\sqrt{6-a}\right| \leqq \frac{a}{2} \leqq \frac{a}{2}+\sqrt{6-a}$$

から

$$\sqrt{6-a} \leqq a$$

を求めることもできる．

＜(1) の別解＞

$a>0$ のとき，$z=x+yi$ （x, y は実数）とおき，① に代入すると

$$a|x-1+yi| = |(a-2)x+a+(a-2)yi|.$$

$$a^2|x-1+yi|^2 = |(a-2)x+a+(a-2)yi|^2.$$

$$a^2\{(x-1)^2+y^2\} = \{(a-2)x+a\}^2+(a-2)^2y^2.$$

$$4(a-1)x^2+4(a-1)y^2-4a(a-1)x = 0.$$

$a \fallingdotseq 1$ より

$$x^2+y^2-ax = 0.$$

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2 = \frac{a^2}{4}.$$

図は解答と同様．

$\boxed{5}$　n は 3 以上の整数とする．

(1)
$$k < a < b < c \leqq k + n. \quad \cdots ①$$

$k+1$ 以上 $k+n$ 以下の異なる n 個の整数から異なる 3 つの整数を選び，その数が小さい順に a, b, c とすると，①を満たす整数 a, b, c の選び方が 1 通りに定まる．

したがって，求める選び方の総数は，n 個から 3 個取る組合せの総数と等しく

$${}_n\mathrm{C}_3 = \boxed{\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)}. \quad \cdots(答)$$

(2)
$$1 \leqq a < b < c \leqq 2n. \quad \cdots ②$$

整数 a, b, c が

$$n < a < b < c \leqq 2n \quad \cdots ③$$

を満たすとき，整数 a, b, c は②も満たす．整数 a, b, c が③を満たすとき

$$a > n,\quad b > n \text{ と } 2n \geqq c$$

より

$$a + b > 2n \geqq c$$

となり $a+b > c$ を満たす．③は①において $k=n$ としたものだから，③を満たす整数 a, b, c の選び方の総数は，(1) より ${}_n\mathrm{C}_3$ である．

また

$$a = n,\quad b = n+1,\quad c = n+2 \quad \cdots ④$$

とすると

$$\begin{aligned} a + b - c &= 2n + 1 - (n+2) \\ &= n - 1 > 0 \end{aligned}$$

より $a+b > c$ となるので，④は②を満たすが③を満たさない整数である．

したがって

$$L \geqq {}_n\mathrm{C}_3 + 1 > {}_n\mathrm{C}_3$$

である．（証明終り）

(注)

②を満たすが③を満たさず，$a+b > c$ を満たす a, b, c の例は，④以外にも

$$a = 3,\quad b = 4,\quad c = 6,$$
$$a = n-1,\quad b = n+1,\quad c = n+2,$$

などを含め，多数ある．