$\boxed{1}$ $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とおく．

(1) $\overrightarrow{CA}\perp\overrightarrow{OB}$ より $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$ であることから，

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CA})\cdot\overrightarrow{OB}$$
$$=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}$$
$$=t. \quad \cdots(答)$$

(2) R は OB 上の点より，

$$\overrightarrow{OR}=k\overrightarrow{OB} \quad (k:実数)$$

とおける．OP と AR は直交するので，

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AR}=0$$

つまり，

$$\left(\frac{\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}}{3}\right)\cdot(k\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=0.$$

$$\{(\vec{a}+2\vec{b})\cdot\vec{b}\}k=(\vec{a}+2\vec{b})\cdot\vec{a}.$$

$$(t+2t^2)k=9+2t.$$

$t>0$ より，

$$k=\frac{9+2t}{t(2t+1)} \quad (>0).$$

ゆえに，

$$OR=k\,OB$$
$$=\frac{2t+9}{2t+1}. \quad \cdots(答)$$

(3) R が線分 MB 上にあるための $t\,(>0)$ の条件は，

$$\frac{1}{2}\leqq k\leqq 1$$

つまり，

$$\frac{1}{2}\leqq\frac{9+2t}{2t^2+t}\leqq 1.$$

$$\begin{cases}2t^2-t-9\geqq 0,\\ 2t^2-3t-18\leqq 0.\end{cases}$$

$$\begin{cases}t\leqq\dfrac{1-\sqrt{73}}{4},\ \dfrac{1+\sqrt{73}}{4}\leqq t,\\ \dfrac{3-3\sqrt{17}}{4}\leqq t\leqq\dfrac{3+3\sqrt{17}}{4}.\end{cases}$$

よって，$t\,(>0)$ のとりうる値の範囲は，

$$\frac{1+\sqrt{73}}{4}\leqq t\leqq\frac{3+3\sqrt{17}}{4}. \cdots(答)$$

2

(1) $\dfrac{k}{k+l-1}a_{k+1}a_l+\dfrac{l}{k+l-1}a_k a_{l+1}$

$=\dfrac{k}{k+l-1}\cdot\dfrac{2k-1}{2k}a_k a_l$

$\quad+\dfrac{l}{k+l-1}a_k\cdot\dfrac{2l-1}{2l}a_l$

$=\left\{\dfrac{2k-1}{2(k+l-1)}+\dfrac{2l-1}{2(k+l-1)}\right\}a_k a_l$

$=\dfrac{2k+2l-2}{2(k+l-1)}a_k a_l$

$=a_k a_l.$ （証明終り）

(2) $k=1,2,\cdots,m$ のとき，$m-k+1$ は正の整数である．そこで(1)の等式の l を $m-k+1$ に置きかえると，

$\dfrac{k}{m}a_{k+1}a_{m-k+1}+\dfrac{m-k+1}{m}a_k a_{m-k+2}$

$=a_k a_{m-k+1}.$

よって，

$a_k a_{m-k+1}$

$=a_k a_{m-k+2}+\dfrac{k}{m}a_{k+1}a_{m-k+1}$

$\quad-\dfrac{k-1}{m}a_k a_{m-k+2}\cdots①$

ここで，

$\displaystyle\sum_{k=1}^{m}a_k a_{m-k+1}=S(m)$

とおくと，①より，

$S(m)$

$=\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\left(a_k a_{m-k+2}+\dfrac{k}{m}a_{k+1}a_{m-k+1}\right.$

$\quad\left.-\dfrac{k-1}{m}a_k a_{m-k+2}\right)$

$=\displaystyle\sum_{k=1}^{m}a_k a_{(m+1)-k+1}$

$\quad+\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\left(\dfrac{k}{m}a_{k+1}a_{m-k+1}\right.$

$\quad\quad\left.-\dfrac{k-1}{m}a_k a_{m-k+2}\right)$

$=\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{m+1}a_k a_{(m+1)-k+1}\right)-a_{m+1}a_1$

$\quad+\left(\dfrac{1}{m}a_2a_m-\dfrac{0}{m}a_1a_{m+1}\right)$

$\quad+\left(\dfrac{2}{m}a_3a_{m-1}-\dfrac{1}{m}a_2a_m\right)$

$\quad+\left(\dfrac{3}{m}a_4a_{m-2}-\dfrac{2}{m}a_3a_{m-1}\right)$

$\quad+\cdots$

$\quad+\left(\dfrac{m-1}{m}a_ma_2-\dfrac{m-2}{m}a_{m-1}a_3\right)$

$\quad+\left(\dfrac{m}{m}a_{m+1}a_1-\dfrac{m-1}{m}a_ma_2\right)$

$=S(m+1)-a_{m+1}a_1+a_{m+1}a_1$

$=S(m+1).$

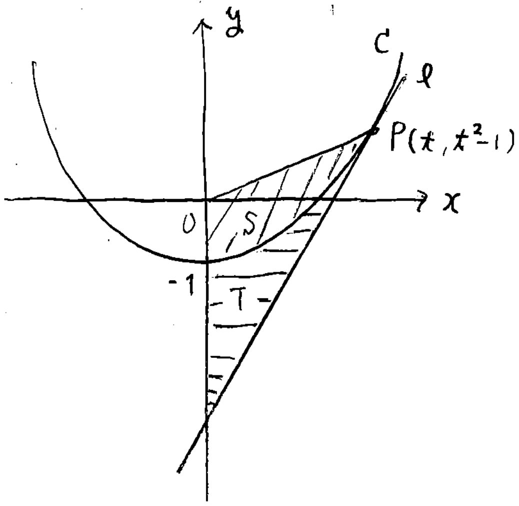
よって，$S(m)$ $(m=1,2,\cdots)$ はすべて等しい．また，

$S(1)=a_1{}^2=1$

であるから，証明された．

（証明終り）

3



$P(t, t^2-1)$ とおく.
曲線Cの対称性より $t>0$ としてよい.
直線OPの方程式は,

$$y=\frac{t^2-1}{t}x.$$

よって,

$$S=\int_0^t\left\{\frac{t^2-1}{t}x-(x^2-1)\right\}dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{t^2-1}{2t}x^2+x\right]_0^t$$
$$=-\frac{1}{3}t^3+\frac{t}{2}(t^2-1)+t$$
$$=\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{2}t.$$

また, $f(x)=x^2-1$ とおくと,
$f'(x)=2x$ であるから直線ℓの方程式は,

$$y-(t^2-1)=2t(x-t).$$
$$y=2tx-t^2-1.$$

したがって,

$$T=\int_0^t\{x^2-1-(2tx-t^2-1)\}dx$$
$$=\int_0^t(x^2-2tx+t^2)dx$$
$$=\int_0^t(x-t)^2dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}(x-t)^3\right]_0^t$$
$$=\frac{1}{3}t^3.$$

以上のことから

$S-T$
$$=\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{2}t-\frac{1}{3}t^3$$
$$=-\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{2}t.$$

$g(t)=-\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{2}t$ とおく.

$$g'(t)=-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}$$
$$=-\frac{1}{2}(t+1)(t-1).$$

$g(t)$ の増減は次の通りである.

t	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(t)$		+	0	−
$g(t)$		↗	$\frac{1}{3}$	↘

したがって, $g(t)$ の $t>0$ における最大値は $t=1$ のとき $\frac{1}{3}$ となる.
よって, $S-T$ の最大値は

$$\frac{1}{3}.\quad\cdots(答)$$