$\boxed{1}$ $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とおく．

(1) $\overrightarrow{CA}\perp\overrightarrow{OB}$ より $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$ であることから，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}&=(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CA})\cdot\overrightarrow{OB}\\&=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}\\&=t.\quad\cdots(答)\end{aligned}$$

(2) R は OB 上の点より，

$$\overrightarrow{OR}=k\,\overrightarrow{OB}\quad(k:実数)$$

とおける．OP と AR は直交するので，

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AR}=0$$

つまり，

$$\left(\frac{\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}}{3}\right)\cdot\left(k\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)=0.$$

$$\{(\vec{a}+2\vec{b})\cdot\vec{b}\}k=(\vec{a}+2\vec{b})\cdot\vec{a}.$$

$$(t+2t^2)k=9+2t.$$

$t>0$ より，

$$k=\frac{9+2t}{t(2t+1)}\quad(>0).$$

ゆえに，

$$\begin{aligned}OR&=k\,OB\\&=\frac{2t+9}{2t+1}.\quad\cdots(答)\end{aligned}$$

(3) R が線分MB上にあるための $t\,(>0)$ の条件は，

$$\frac{1}{2}\leqq k\leqq 1$$

つまり，

$$\frac{1}{2}\leqq\frac{9+2t}{2t^2+t}\leqq 1.$$

$$\begin{cases}2t^2-t-9\geqq 0,\\ 2t^2-3t-18\leqq 0.\end{cases}$$

$$\begin{cases}t\leqq\dfrac{1-\sqrt{73}}{4},\ \dfrac{1+\sqrt{73}}{4}\leqq t,\\ \dfrac{3-3\sqrt{17}}{4}\leqq t\leqq\dfrac{3+3\sqrt{17}}{4}.\end{cases}$$

よって，$t\,(>0)$ のとりうる値の範囲は，

$$\frac{1+\sqrt{73}}{4}\leqq t\leqq\frac{3+3\sqrt{17}}{4}.\quad\cdots(答)$$

2

$f(x) = x^3 + 3px^2 + 3mx$.

$f'(x) = 3(x^2 + 2px + m)$.

$f''(x) = 6(x + p)$.

(1) $f(x)$ は $x = \alpha$ で極大値，$x = \beta$ で極小値をとるから，$f'(x) = 0$，つまり $x^2 + 2px + m = 0$ の2解

$$x = -p \pm \sqrt{p^2 - m} \quad (p^2 - m > 0)$$

が α, β $(\alpha < \beta)$ である．

$$\begin{aligned} &f(\alpha) - f(\beta) \\ &= \int_\beta^\alpha f'(x)\,dx \\ &= 3\int_\beta^\alpha (x^2 + 2px + m)\,dx \\ &= 3\int_\beta^\alpha (x - \alpha)(x - \beta)\,dx \\ &= 3 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)(\alpha - \beta)^3 \\ &= -\frac{1}{2}\left(-2\sqrt{p^2 - m}\right)^3 \\ &= 4\left(\sqrt{p^2 - m}\right)^3. \quad \cdots \text{(答)} \end{aligned}$$

(2) p と m は $f(\alpha) - f(\beta) = 4$ を満たして動くから (1) より

$$p^2 - m = 1 \ (p^2 - m > 0 \text{ を満たす}). \cdots ①$$

曲線 $y = f(x)$ の変曲点は $(-p, f(-p))$ であり，

$$\begin{aligned} f(-p) &= -p^3 + 3p^3 - 3mp \\ &= -p^3 + 3p \quad (①\text{より}). \end{aligned}$$

ある点 (X, Y) が変曲点の軌跡上にある必要十分条件は

$$\begin{cases} X = -p, \\ Y = -p^3 + 3p \end{cases}$$

を満たす実数 p が存在することだから，

$$\begin{aligned} Y &= -(-X)^3 + 3(-X) \\ &= X^3 - 3X. \end{aligned}$$

よって，変曲点の軌跡は

曲線：$y = x^3 - 3x$. …（答）

$\boxed{3}$

$\overrightarrow{AO}=(0,-1,-1)$, $\overrightarrow{AP}=(x,\ y-1,\ -1)$.

$\angle OAP = 30^\circ$ より

$$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AP}=|\overrightarrow{AO}||\overrightarrow{AP}|\cos 30^\circ.$$

$$2-y=\sqrt{2}\sqrt{x^2+(y-1)^2+1}\,\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

右辺 $\geqq 0$ より $2-y \geqq 0$. また $y \geqq 0$ より

$$0 \leqq y \leqq 2.$$

このとき,

$$(2-y)^2 = 2\cdot\{x^2+(y-1)^2+1\}\cdot\frac{3}{4}.$$

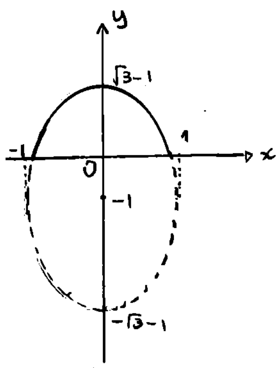
$$x^2+\frac{1}{3}y^2+\frac{2}{3}y-\frac{2}{3}=0.$$

$$x^2+\frac{1}{3}(y+1)^2=1.$$

以上より

$$x^2+\frac{1}{3}(y+1)^2=1 \qquad (0 \leqq y \leqq 2).$$

点Pの描く軌跡は xy 平面において次図のようになる.



$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}\ \left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ となる α をとると

点 $P(x,\ y,\ 0)$ は

$$x=\cos\theta,\quad y=\sqrt{3}\sin\theta-1 \quad (\alpha \leqq \theta \leqq \pi-\alpha)$$

と表せる.

このとき

$$(x+1)(y+1)=\sqrt{3}\sin\theta(\cos\theta+1),$$

$$f(\theta)=\sqrt{3}\sin\theta(\cos\theta+1) \quad (\alpha \leqq \theta \leqq \pi-\alpha)$$

とおいて $f(\theta)$ の増減を調べる.

$$f'(\theta)=\sqrt{3}\{\cos\theta(\cos\theta+1)+\sin\theta(-\sin\theta)\}$$
$$=\sqrt{3}(\cos^2\theta-\sin^2\theta+\cos\theta)$$
$$=\sqrt{3}(2\cos^2\theta+\cos\theta-1)$$
$$=\sqrt{3}(2\cos\theta-1)(\cos\theta+1).$$

$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}<\sin\frac{\pi}{3}$ より $\alpha<\frac{\pi}{3}<\pi-\alpha$.

θ	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\pi-\alpha$
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$f(\theta)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{9}{4}.$$

また $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}\ \left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ より $\cos\alpha=\sqrt{\frac{2}{3}}$.

$$f(\alpha)=\sqrt{3}\sin\alpha(\cos\alpha+1)$$
$$=\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}+1\right)=1+\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

$$f(\pi-\alpha)=\sqrt{3}\sin(\pi-\alpha)\{\cos(\pi-\alpha)+1\}$$
$$=\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}+1\right)=1-\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

以上より

最大値 $\frac{9}{4}$, 最小値 $1-\frac{\sqrt{6}}{3}$. …(答)

4

(1) $(0<)\,t \leqq x \leqq 2t$ において $\left|\dfrac{\sin x}{x^2}\right| \leqq \dfrac{1}{x^2}$ より，

$$\left|\int_t^{2t}\frac{\sin x}{x^2}dx\right| \leqq \int_t^{2t}\left|\frac{\sin x}{x^2}\right|dx \leqq \int_t^{2t}\frac{1}{x^2}dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_t^{2t} = -\left(\frac{1}{2t}-\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{2t} < \frac{1}{t}.$$

したがって，$-\dfrac{1}{t} < \displaystyle\int_t^{2t}\frac{\sin x}{x^2}dx < \frac{1}{t}$．（証明終り）

(2) $\displaystyle\int_t^{2t}\frac{\cos x}{x}dx$

$$= \int_t^{2t}\frac{1}{x}\cdot(\sin x)'dx$$

$$= \left[\frac{\sin x}{x}\right]_t^{2t} - \int_t^{2t}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\sin x\,dx$$

$$= \frac{\sin 2t}{2t} - \frac{\sin t}{t} + \int_t^{2t}\frac{\sin x}{x^2}dx.$$

$t>0$ において，$\left|\dfrac{\sin 2t}{2t}\right| \leqq \dfrac{1}{2t}$，$\left|\dfrac{\sin t}{t}\right| \leqq \dfrac{1}{t}$．

これらと(1)および $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}=0$ より，はさみうちの原理から，

$$\lim_{t\to\infty}\int_t^{2t}\frac{\sin x}{x^2}dx = 0,$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\sin 2t}{2t} = 0,\quad \lim_{t\to\infty}\frac{\sin t}{t} = 0.$$

以上より，

$$\lim_{t\to\infty}\int_t^{2t}\frac{\cos x}{x}dx = 0-0+0 = 0.$$ （証明終り）

(3) $f(x) = \sin\left(\dfrac{3x}{2}\right)\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$
$$= -\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\cos x$$

であるから，

$$\int_1^t \frac{f(x)}{x}dx = -\frac{1}{2}\int_1^t\frac{\cos 2x}{x}dx + \frac{1}{2}\int_1^t\frac{\cos x}{x}dx.$$

第1項について，$s=2x$ とおくと $x=\dfrac{1}{2}s$ より

$\dfrac{dx}{ds} = \dfrac{1}{2}$．

x	$1 \to t$
s	$2 \to 2t$

したがって，

$$\int_1^t\frac{f(x)}{x}dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_2^{2t}2\frac{\cos s}{s}\cdot\frac{1}{2}ds + \frac{1}{2}\int_1^t\frac{\cos x}{x}dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_2^{2t}\frac{\cos x}{x}dx + \frac{1}{2}\int_1^2\frac{\cos x}{x}dx + \frac{1}{2}\int_2^t\frac{\cos x}{x}dx$$

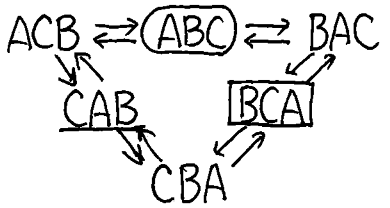
$$= \frac{1}{2}\int_1^2\frac{\cos x}{x}dx - \frac{1}{2}\int_t^{2t}\frac{\cos x}{x}dx.$$

(2)より，

$$\lim_{t\to\infty}\int_1^t\frac{f(x)}{x}dx = \frac{1}{2}\int_1^2\frac{\cos x}{x}dx - \frac{1}{2}\cdot 0 = \frac{1}{2}\int_1^2\frac{\cos x}{x}dx.$$ （証明終り）

$\boxed{5}$

1回ごとに文字列は次のように変化する.



(1) ABC からはじめるので, $2k$回後は

ABC, $\boxed{\text{BCA}}$, $\underline{\text{CAB}}$ のいずれかとなる.

$2(k+1)$回後に ABC となるのは次の場合.

2k回後 → 2$(k+1)$回後

ABC (p_{2k}) $\xrightarrow{\text{表2回 or 裏2回}\ \left(\frac{2}{4}\right)}$ ABC $(p_{2(k+1)})$

$\boxed{\text{BCA}}$ (q_{2k}) $\xrightarrow{\text{裏→表}\ \left(\frac{1}{4}\right)}$ ABC

$\underline{\text{CAB}}$ $(1-p_{2k}-q_{2k})$ $\xrightarrow{\text{表→裏}\ \left(\frac{1}{4}\right)}$ ABC

これより

$$p_{2(k+1)} = p_{2k}\cdot\frac{2}{4} + q_{2k}\cdot\frac{1}{4} + (1-p_{2k}-q_{2k})\cdot\frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{4}p_{2k} + \frac{1}{4}. \quad \cdots\cdots ①$$

$2(k+1)$回後に $\boxed{\text{BCA}}$ となるのは次の場合.

2k回後 → 2$(k+1)$回後

ABC (p_{2k}) $\xrightarrow{\text{表→裏}\ \left(\frac{1}{4}\right)}$ $\boxed{\text{BCA}}$ $(q_{2(k+1)})$

$\boxed{\text{BCA}}$ (q_{2k}) $\xrightarrow{\text{表2回 or 裏2回}\ \left(\frac{2}{4}\right)}$ $\boxed{\text{BCA}}$

$\underline{\text{CAB}}$ $(1-p_{2k}-q_{2k})$ $\xrightarrow{\text{裏→表}\ \left(\frac{1}{4}\right)}$ $\boxed{\text{BCA}}$

これより

$$q_{2(k+1)} = p_{2k}\cdot\frac{1}{4} + q_{2k}\cdot\frac{2}{4} + (1-p_{2k}-q_{2k})\cdot\frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{4}q_{2k} + \frac{1}{4}. \quad \cdots\cdots ②$$

①−②より

$$p_{2(k+1)} - q_{2(k+1)} = \frac{1}{4}(p_{2k} - q_{2k}).$$

これがどの k でも成り立つことと,

$p_0=1,\ q_0=0$ とできることから

$$p_{2k} - q_{2k} = (p_0 - q_0)\left(\frac{1}{4}\right)^{k-0}$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^{k}. \quad \cdots\cdots(答)$$

(2) 文字列 ABC は偶数回後にしか現れない.

$n=2k\ (k=0,1,2,\cdots)$ のとき, ①より

$$p_{2(k+1)} - \frac{1}{3} = \frac{1}{4}\left(p_{2k} - \frac{1}{3}\right).$$

これより

$$p_{2k} - \frac{1}{3} = \left(p_0 - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{k-0}.$$

$$p_{2k} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}$$

よって

$$p_n = \begin{cases} 0 & (n\text{が奇数のとき}) \\ \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n} & (n\text{が偶数のとき}) \end{cases}$$

$\cdots\cdots$(答)