1

(1)　部分積分法より

$$\int x\log(1+x)\,dx=\int\left(\frac{x^2}{2}\right)'\log(1+x)\,dx$$
$$=\frac{x^2}{2}\log(1+x)-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{1+x}\,dx.\qquad\cdots①$$

x^2 を $x+1$ で割った商は $x-1$, 余りは 1 であるから,

$$\frac{x^2}{1+x}=x-1+\frac{1}{1+x}$$

と変形できる．よって, ① に用いると,

$$\int x\log(1+x)\,dx=\frac{x^2}{2}\log(1+x)-\frac{1}{2}\int\left(x-1+\frac{1}{1+x}\right)dx$$
$$=\frac{x^2}{2}\log(1+x)-\frac{1}{2}\left\{\frac{(x-1)^2}{2}+\log(1+x)\right\}+C$$
$$=\frac{x^2-1}{2}\log(1+x)-\frac{(x-1)^2}{4}+C.\qquad(C\text{ は積分定数})\qquad\cdots(\text{答})$$

(1) の別解

a がどんな定数でも $\dfrac{x^2}{2}+a$ の導関数は x であるから, $a=-\dfrac{1}{2}$ とすると次のように約分できる．

$$\int x\log(1+x)\,dx=\int\left(\frac{x^2-1}{2}\right)'\log(1+x)\,dx$$
$$=\frac{x^2-1}{2}\log(1+x)-\int\frac{x^2-1}{2}\cdot\frac{1}{1+x}\,dx$$
$$=\frac{x^2-1}{2}\log(1+x)-\int\frac{x-1}{2}\,dx$$
$$=\frac{x^2-1}{2}\log(1+x)-\frac{(x-1)^2}{4}+C.\qquad(C\text{ は積分定数})\qquad\cdots(\text{答})$$

(2)

$$I=\int_a^b g(x)\,dx$$

を

$$x=f(t)$$

と置換して求める．逆関数の定義より

$$g(f(t))=t.\qquad\cdots②$$

$\dfrac{dx}{dt}=f'(t)$ であり, $\begin{array}{c|ccc} x & a & \to & b \\ \hline t & 1 & \to & 2 \end{array}$ であるから,

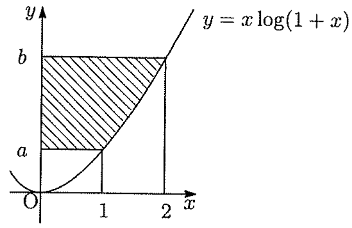
$$I=\int_1^2 g(f(t))\frac{dx}{dt}dt$$
$$=\int_1^2 tf'(t)\,dt\qquad(②\text{より})$$
$$=[tf(t)]_1^2-\int_1^2 1\cdot f(t)\,dt\qquad(\text{部分積分法による})$$
$$=2f(2)-f(1)-\left[\frac{t^2-1}{2}\log(1+t)-\frac{(t-1)^2}{4}\right]_1^2\qquad((1)\text{ の結果を用いた})$$
$$=4\log 3-\log 2-\left(\frac{3}{2}\log 3-\frac{1}{4}\right)$$
$$=\frac{5}{2}\log 3-\log 2+\frac{1}{4}.\qquad\cdots(\text{答})$$

1 （つづき）

(2) の別解　I は右図斜線部の面積である．$a=\log 2,\ b=2\log 3$ より，

$$\begin{aligned} I &= 2b-a-\int_1^2 x\log(1+x)dx \\ &= 4\log 3-\log 2-\left[\frac{x^2-1}{2}\log(1+x)-\frac{(x-1)^2}{4}\right]_1^2 \\ &= 4\log 3-\log 2-\left(\frac{3}{2}\log 3-\frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{5}{2}\log 3-\log 2+\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

…（答）



(3)　$R(x)=\displaystyle\int_0^{P(x)}\frac{1}{Q'(v)}dv$ を $v=P(u)$ と置換して求める．逆関数の定義より

$$Q(P(u))=u$$

であるから，両辺を u で微分して

$$Q'(P(u))P'(u)=1.$$

よって，

$$\frac{1}{Q'(P(u))}=P'(u). \quad \cdots ③$$

また，

$$P(u)=\int_0^u\sqrt{1+f(t)}\,dt$$

であるから，

$$P'(u)=\sqrt{1+f(u)}. \quad \cdots ④$$

$\dfrac{dv}{du}=P'(u)$ であり，

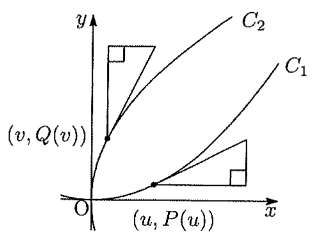
v	$0\ \to\ P(x)$
u	$0\ \to\ x$

であるから，

$$\begin{aligned} R(x) &= \int_0^x\frac{1}{Q'(P(u))}P'(u)du \\ &= \int_0^x P'(u)P'(u)du && (③\text{ より}) \\ &= \int_0^x (1+f(u))du && (④\text{ より}) \\ &= \left[u+\frac{u^2-1}{2}\log(1+u)-\frac{(u-1)^2}{4}\right]_0^x && ((1)\text{ の結果を用いた}) \\ &= \left\{x+\frac{x^2-1}{2}\log(1+x)-\frac{(x-1)^2}{4}\right\}-\left(-\frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{x^2-1}{2}\log(1+x)-\frac{x^2}{4}+\frac{3}{2}x. \end{aligned}$$

…（答）

【参考】　逆関数の定義より $P(u)=v \Longleftrightarrow u=Q(v)$ である．2 曲線 $C_1: y=P(x)$ と $C_2: y=Q(x)$ は直線 $y=x$ に関して対称であるから，C_1 上の点 $(u, P(u))$ での接線の傾き $P'(u)$ は，C_2 上の点 $(P(u), u)=(v, Q(v))$ での接線の傾き $Q'(v)$ の逆数に等しい．このことから，(3) の③を得ることもできる．



2

(1)　実数 $p,\ q$ を用いて，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+p\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}+q\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$$

と表され，

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}-p\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+q\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}.$$

ここで，$\mathrm{PQ}\perp l,\ \mathrm{PQ}\perp m$ であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=0 \text{ かつ } \overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}=0.$$

$$1-2p-q=0 \text{ かつ } -4+p+5q=0.$$

$$p=\frac{1}{9},q=\frac{7}{9}.$$

このとき，

$$\mathrm{P}\left(\frac{1}{9},-\frac{1}{9},1\right),\mathrm{Q}\left(1,\frac{7}{9},\frac{13}{9}\right),\mathrm{PQ}=\frac{4}{9}\sqrt{2^2+2^2+1^2}=\frac{4}{3}. \quad \cdots(\text{答})$$

(2)

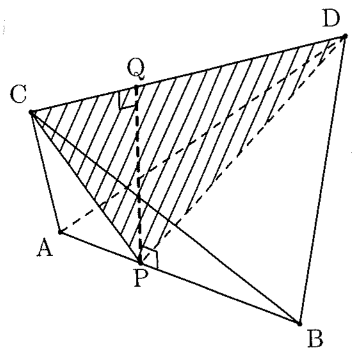
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(2+\sin t)\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\ \overrightarrow{\mathrm{CD}}=(2+\cos t)\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix} \quad \cdots①$$

であるから，$t=0$ のとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=2\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\ \overrightarrow{\mathrm{CD}}=3\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}.$$

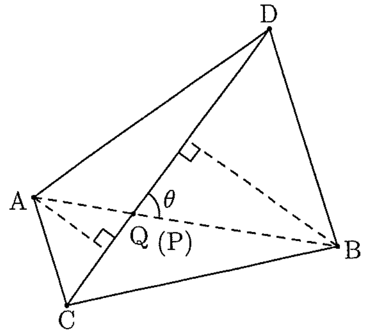
よって，

$$\triangle \mathrm{PCD}=\frac{1}{2}\times \mathrm{CD}\times \mathrm{PQ}$$
$$=\frac{1}{2}\times 3\sqrt{5}\times\frac{4}{3}$$
$$=2\sqrt{5}.$$



ここで，$\overrightarrow{\mathrm{CD}},\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ のなす角を θ とすると，

2 （つづき１）



(2点Q, Pが重なるような位置から見た図)

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{CD}}|} = -\frac{1}{\sqrt{10}}$$

より，$\sin\theta = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$ であるから，

$$V(0) = \frac{1}{3}\times\triangle\mathrm{PCD}\times\mathrm{AB}\sin\theta = \frac{1}{3}\times 2\sqrt{5}\times 2\sqrt{2}\times\frac{3}{\sqrt{10}} = 4. \quad \cdots(答)$$

(3)　$t=0$ のときと比べると，①より，辺ABの長さは $\left|\dfrac{2+\sin t}{2+\sin 0}\right|$ 倍，辺CDの長さは $\left|\dfrac{2+\cos t}{2+\cos 0}\right|$ 倍されるので，

$$V(t) = \left|\frac{2+\sin t}{2+\sin 0}\right|\left|\frac{2+\cos t}{2+\cos 0}\right|V(0)$$

$$= \frac{2}{3}(2+\sin t)(2+\cos t)$$

$$= \frac{2}{3}\{4+2(\sin t+\cos t)+\sin t\cos t\}.$$

ここで，$u=\sin t+\cos t$ とおくと，

$$V(t) = \frac{2}{3}\left(4+2u+\frac{u^2-1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\{(u+2)^2+3\}$$

であり，

$$u = \sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$$

および $t \geqq 0$ から，u のとりうる値の範囲は，

$$-\sqrt{2} \leqq u \leqq \sqrt{2}.$$

よって，$u=\sqrt{2}$ のとき $V(t)$ は最大で，最大値は，

$$3+\frac{4}{3}\sqrt{2}, \quad \cdots(答)$$

$u=-\sqrt{2}$ のとき $V(t)$ は最小で，最小値は，

$\boxed{2}$ （つづき２）

$$3-\frac{4}{3}\sqrt{2}. \qquad \cdots(答)$$

3

(1) 表が出ることを○, 裏が出ることを×で表す.

・ゲームが終わったときに1点になるのは,

○××, ×○××

のいずれかの順番で出る場合なので, その確率は,

$$Q_1 = p(1-p)^2 + p(1-p)^3$$

$$= p(1-p)^2(2-p). \qquad \cdots \text{(答)}$$

・ゲームが終わったときに2点になるのは,

○○××, ○×○××, ×○○××, ×○×○××

のいずれかの順番で出る場合なので, その確率は,

$$Q_2 = p^2(1-p)^2 + 2p^2(1-p)^3 + p^2(1-p)^4$$

$$= p^2(1-p)^2(2-p)^2. \qquad \cdots \text{(答)}$$

(2) $(n+1)$ 点で終了するのは, 次の2つのいずれかの場合であり, これらは排反である.

・1回目が○であり, そのあと n 点とって終了.

・1回目が×, 2回目が○であり, そのあと n 点とって終了.

よって,

$$Q_{n+1} = pQ_n + (1-p)pQ_n = p(2-p)Q_n.$$

これより, 数列 $\{Q_n\}$ は初項 $Q_0 = (1-p)^2$, 公比 $p(2-p)$ の等比数列であるから,

$$Q_n = (1-p)^2 p^n (2-p)^n. \qquad \cdots \text{(答)}$$

((2) の別解)

n 点で終わる場合は次のような場合に限る.

まず, 最後は×が2回連続し, それまでに○が n 回出る.

○○・・・○○××

そして, 左端の○の左, あるいは○と○の $n-1$ 個の間の, 合計 n か所のいずれかに×を1つずつ入れていく.

×が k 個 ($k = 0, 1, \cdots, n$) 入るような場合の確率は,

$${}_nC_k(1-p)^k p^n (1-p)^2.$$

よって,

$$Q_n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k(1-p)^k p^n (1-p)^2$$

ここで, 二項定理から

$$\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k(1-p)^k = (1+1-p)^n = (2-p)^n.$$

したがって,

$$Q_n = (2-p)^n p^n (1-p)^2. \qquad \cdots \text{(答)}$$

3 （つづき１）

(3)　N を 0 以上の整数とする．

$$\sum_{n=0}^{N}(n+1)x^n=\sum_{n=0}^{N}(x^{n+1})'=\left(\sum_{n=0}^{N}x^{n+1}\right)'$$
$$=\left(x\frac{1-x^{N+1}}{1-x}\right)'=\left(\frac{x-x^{N+2}}{1-x}\right)'$$
$$=\frac{\{1-(N+2)x^{N+1}\}(1-x)+x-x^{N+2}}{(1-x)^2}$$
$$=\frac{\{1-(N+1)x^{N+1}-x^{N+1}\}(1-x)+x-x^{N+2}}{(1-x)^2}.$$

ここで，$\lim_{N\to\infty}x^N=0$，$\lim_{N\to\infty}Nx^N=0$ であるから，

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}(n+1)x^n=\frac{1}{(1-x)^2}.$$

よって，

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n=\frac{1}{(1-x)^2}.$$　（証明終り）

（(3) の別解）

N を 0 以上の整数として，$S_N=\sum_{n=0}^{N}(n+1)x^n$ とおく．

$$S_N=\quad 1\cdot x^0+2\cdot x^1+3\cdot x^2+\cdots\cdots+(N+1)\cdot x^N$$
$$xS_N=\qquad 1\cdot x^1+2\cdot x^2+3\cdot x^3+\cdots+N\cdot x^N+(N+1)\cdot x^{N+1}$$

辺々引いて

$$(1-x)S_N=1+x+x^2+\cdots\cdots+x^N\quad-(N+1)x^{N+1}$$
$$=\frac{1-x^{N+1}}{1-x}-(N+1)x^{N+1}$$

ここで，$\lim_{N\to\infty}x^N=0$，$\lim_{N\to\infty}Nx^N=0$ であることから，

$$\lim_{N\to\infty}(1-x)S_N=\frac{1}{1-x}$$
$$\lim_{N\to\infty}S_N=\frac{1}{(1-x)^2}.$$

したがって，

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n=\frac{1}{(1-x)^2}.$$　（証明終り）

$\boxed{3}$ （つづき２）

(4)　$p(2-p)=-(p-1)^2+1$ であるから，$0<p<1$ のとき $0<p(2-p)<1$．

そこで，(3)の式に $x=p(2-p)$ を代入して，

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\{p(2-p)\}^n=\frac{1}{\{1-p(2-p)\}^2}=\frac{1}{(1-p)^4}.\quad\cdots①$$

左辺で，$n+1=m$ とすると，

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\{p(2-p)\}^n=\sum_{m=1}^{\infty}m\{p(2-p)\}^{m-1}$$

となるので，この m をあらためて n として，①は，

$$\sum_{n=1}^{\infty}n\{p(2-p)\}^{n-1}=\frac{1}{(1-p)^4}$$

となる．この両辺に $(1-p)^2p(2-p)$ をかけると，

$$\sum_{n=1}^{\infty}n(1-p)^2\{p(2-p)\}^n=\frac{p(2-p)}{(1-p)^2}.$$

$Q_n=(1-p)^2p^n(2-p)^n$ であるから，

$$\sum_{n=0}^{\infty}nQ_n=\sum_{n=1}^{\infty}nQ_n=\frac{p(2-p)}{(1-p)^2}.\qquad\cdots（答）$$

4

(1)　漸化式 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ と $a_1=a_2=1$ より，$a_3=a_2+a_1=1+1=2$ であり，$n\geqq 2$ のとき，

$$\begin{aligned}a_{n+2}a_n-a_{n+1}^2&=(a_{n+1}+a_n)a_n-a_{n+1}^2\\&=a_{n+1}(a_n-a_{n+1})+a_n^2\\&=-(a_{n+1}a_{n-1}-a_n^2).\end{aligned}$$

よって，数列 $\left\{a_{n+1}a_{n-1}-a_n^2\right\}$ は初項 $a_3a_1-a_2^2=2\cdot 1-1^2=1$，公比 -1 の等比数列であるから，$n\geqq 2$ のとき，

$$a_{n+1}a_{n-1}-a_n^2=(-1)^{n-2}=(-1)^n. \qquad \cdots(答)$$

(2)

$$\begin{aligned}a_{2m}\cdot\tan(b_{2m+1}+b_{2m+2})&=a_{2m}\cdot\frac{\tan b_{2m+1}+\tan b_{2m+2}}{1-\tan b_{2m+1}\tan b_{2m+2}}\\&=a_{2m}\cdot\frac{\dfrac{1}{a_{2m+1}}+\dfrac{1}{a_{2m+2}}}{1-\dfrac{1}{a_{2m+1}}\dfrac{1}{a_{2m+2}}}\\&=\frac{a_{2m}a_{2m+2}+a_{2m}a_{2m+1}}{a_{2m+1}a_{2m+2}-1}\\&=\frac{a_{2m+1}^2+(-1)^{2m+1}+a_{2m}a_{2m+1}}{a_{2m+1}(a_{2m+1}+a_{2m})-1}\end{aligned}$$

((1) の結果と $a_{2m+2}=a_{2m+1}+a_{2m}$ より．)

$$=1. \qquad \cdots(答)$$

(3) (2) の結果より，

$$\tan(b_{2m+1}+b_{2m+2})=\frac{1}{a_{2m}}.$$

よって，

$$\tan(b_{2m+1}+b_{2m+2})=\tan b_{2m}.$$

ここで，$0<b_{2m+1}+b_{2m+2}<\pi$，$0<b_{2m}<\dfrac{\pi}{2}$ より，

$$b_{2m+1}+b_{2m+2}=b_{2m}.$$

よって，自然数 N に対して $\displaystyle\sum_{m=1}^{N}b_{2m+1}=\sum_{m=1}^{N}(b_{2m}-b_{2m+2})=b_2-b_{2N+2}$ となるから，

$$\sum_{m=0}^{N}b_{2m+1}=b_1+b_2-b_{2N+2}.$$

ここで，$a_1=a_2=1$ より，$\tan b_1=\dfrac{1}{a_1}=1$，$\tan b_2=\dfrac{1}{a_2}=1$．これと $0<b_n<\dfrac{\pi}{2}$ より，$b_1=\dfrac{\pi}{4}$，$b_2=\dfrac{\pi}{4}$ である．また，$a_1=a_2=1$ と $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ より，$\{a_n\}$ の各項は自然数であるから，$n\geqq 2$ のとき，$a_{n+1}\geqq a_n+1$ が成り立ち，$a_{n+1}\geqq n$ が言えるから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\infty$ が成り立つ．すなわち，$\displaystyle\lim_{N\to\infty}a_{2N+2}=\infty$ が成り立つ．これより，

$\boxed{4}$ （つづき）

$$\lim_{N\to\infty} \tan b_{2N+2} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{a_{2N+2}} = 0$$

であり，$0 < b_{2N+2} < \dfrac{\pi}{2}$ であるから，

$$\lim_{N\to\infty} b_{2N+2} = 0.$$

したがって，

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{\infty} b_{2m+1} &= \lim_{N\to\infty} \sum_{m=0}^{N} b_{2m+1} \\ &= \lim_{N\to\infty} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} - b_{2N+2}\right) \\ &= \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

$\cdots$ (答)

$\boxed{5}$

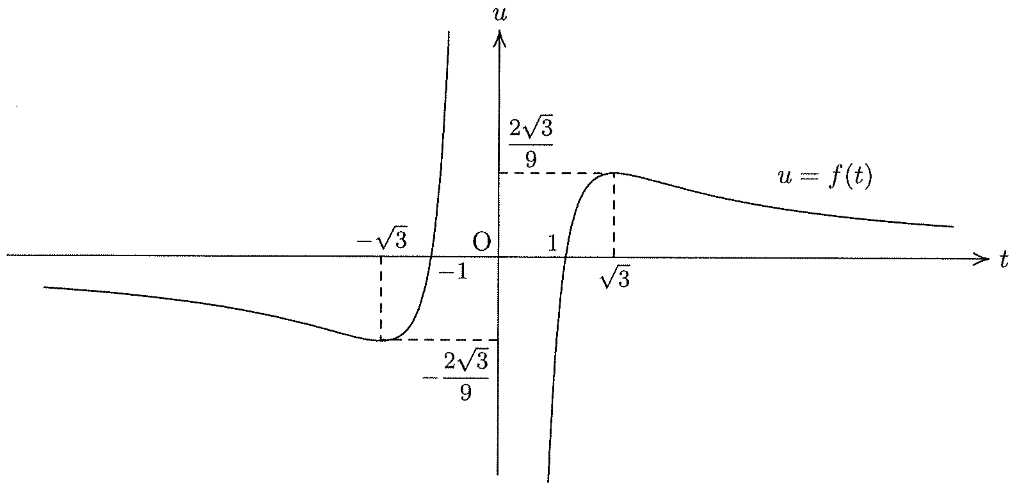
(1)　$f(-t)=-f(t)$ より $f(t)$ は奇関数である．よって，グラフは原点対称である．また，

$$f'(t)=\frac{2t\cdot t^3-\left(t^2-1\right)\cdot 3t^2}{t^6}=\frac{\left(\sqrt{3}+t\right)\left(\sqrt{3}-t\right)}{t^4},\quad \lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t^3}\right)=0,\quad \lim_{t\to+0}f(t)=-\infty$$

であるから，$f(t)$ の増減は次のようになる．

t	(0)	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$	(∞)
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	$(-\infty)$	$\nearrow$	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\searrow$	(0)

よって，$f(t)$ のグラフの概形は以下のようである．



…(答)

(2)　x の取り得る値の範囲に k が属するための条件は，

$$\begin{cases} k<y<z, & \cdots ① \\ kyz\neq 0, & \cdots ② \\ k^3y^2-k^3=k^2y^3-y^3, & \cdots ③ \\ y^3z^2-y^3=y^2z^3-z^3 & \cdots ④ \end{cases}$$

をすべて満たす実数 y, z が存在することである．以下，この条件を求める．

②より $k\neq 0$ かつ $y\neq 0$ かつ $z\neq 0$ である．このもとで③は，

$$\left(y^2-1\right)k^3=\left(k^2-1\right)y^3$$
$$\frac{y^2-1}{y^3}=\frac{k^2-1}{k^3}$$
$$f(y)=f(k)$$

となる．同様にして④は $f(z)=f(y)$ となるから，③かつ④は，

$$f(y)=f(z)=f(k)$$

となる．

$\boxed{5}$(つづき)

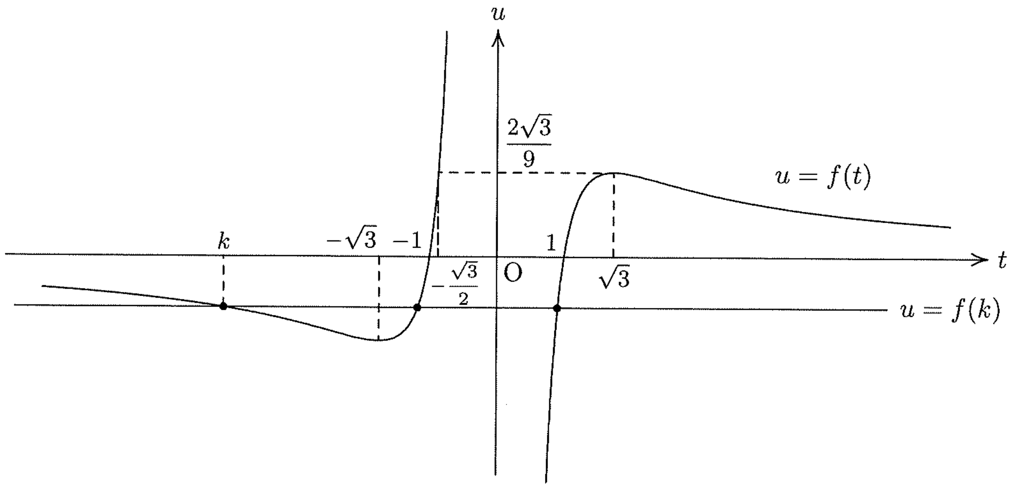
これと①から求める条件は,

$f(t)=f(k)$ かつ $t>k$ を満たす異なる実数 t が 2 個以上存在すること

となる．さらにこれは,

$u=f(t)$ のグラフと直線 $u=f(k)$ が，$t>k$ の範囲に異なる共有点を 2 個以上もつこと

と言い換えることができる．



そこで，$f(t)=\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$ となる t を求める．$\dfrac{t^2-1}{t^3}=\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$ より $\left(2t+\sqrt{3}\right)\left(t-\sqrt{3}\right)^2=0$ となるから，$f(t)=\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$ となる t は $t=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}$ である．(1) で描いた $u=f(t)$ のグラフから求める条件は,

$$k<-\sqrt{3},\ -1<k<-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

である．

以上より，x の取り得る値の範囲は,

$$x<-\sqrt{3},\ -1<x<-\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cdots(答)$$

である．