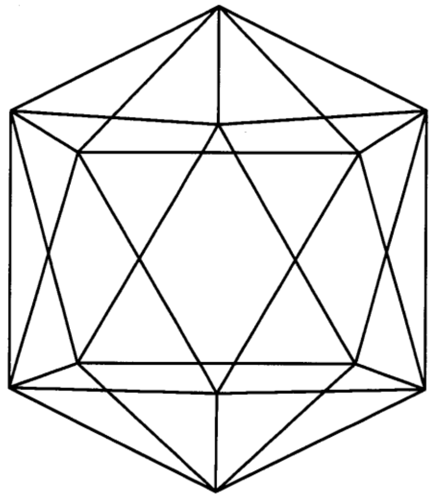
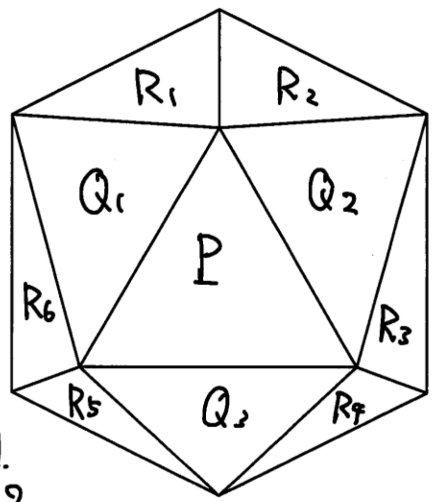
1

(1) 各辺・頂点の xy 平面への正射影は次図.



---(答)

(2) (1)と同様に I の1つの面を xy 平面と平行になるように I を配置したとき. z 座標の大きい方(これを上側)から I を見ると. 下図のように見える. このとき見える10面に対して図のように P, $Q_1 \sim Q_3$, $R_1 \sim R_6$ とする. また, z 座標の小さい方(これを下側とする)から I を見ると, 同様に10面が見えるので, 図と同様に P'. $Q_1' \sim Q_3'$, $R_1' \sim R_6'$ とする. ただし R_1 と R_4', R_2 と R_5', R_3 と R_6'. R_4 と R_1'. R_5 と R_2'. R_6 と R_3' は, それぞれ辺を共有しているものとする.



いま F_1 に対応する面が P であるときについて. F_2 に対応する面を考える.

(i) F_2 に対応する面が P のとき, $d(F_1, F_2) = 0$

(ii) F_2 に対応する面が $Q_1 \sim Q_3$ のとき. $d(F_1, F_2) = 1$.

(iii) F_2 に対応する面が $R_1 \sim R_6$ のとき $d(F_1, F_2) = 2$

(iv) F_2 に対応する面が $R_1' \sim R_6'$ のとき. $d(F_1, F_2) = 3$

(v) F_2 に対応する面が $Q_1' \sim Q_3'$ のとき $d(F_1, F_2) = 4$

(vi) F_2 に対応する面が P' のとき. $d(F_1, F_2) = 5$

したがって $P_0 = \dfrac{1}{20}$, $P_1 = \dfrac{3}{20}$, $P_2 = \dfrac{3}{10}$, $P_3 = \dfrac{3}{10}$. $P_4 = \dfrac{3}{20}$. $P_5 = \dfrac{1}{20}$ ---(答)

1 (つづき1)

(3) $n=3$ のとき $M \geqq 3$ となるのは，少なくとも1回は $d(F_i, F_j)$ が 3以上となるとき．最初に出た面を P とする．

2回目，または3回目で，少なくとも1回，下側から見える面が出れば，$d(F_1, F_j) \geqq 3$ $(j=2 \text{ or } 3)$ となり $M \geqq 3$ を満たす．
2回目，3回目が共に上側から見える面のときは $d(F_1, F_i) \leqq 2$ $(i=2, 3)$ であるから $d(F_2, F_3) \geqq 3$ であればよい．

$\{Q_1, R_3\}$, $\{Q_1, R_4\}$, $\{Q_2, R_5\}$, $\{Q_2, R_6\}$, $\{Q_3, R_1\}$, $\{Q_3, R_2\}$
$\{R_1, R_3\}$, $\{R_1, R_4\}$, $\{R_1, R_5\}$, $\{R_2, R_4\}$, $\{R_2, R_5\}$, $\{R_2, R_6\}$
$\{R_3, R_5\}$, $\{R_3, R_6\}$, $\{R_4, R_6\}$

したがって

$$1-\left(\frac{10}{20}\right)^2 + 15 \times {}_2C_1 \times \frac{1}{20} \times \frac{1}{20} = \frac{33}{40}. \quad \text{---(答)}$$

((3)の別解)

$n=3$ のとき，余事象，すなわち $M \leqq 2$ となる確率を求める．
最初に出た面を P とする．2回目以降は上側から見える面，すなわち P, Q_k, R_k のいずれかの面が出る．

(i) 2回目に P が出るとき，
3回目に P, Q_k, R_k のいずれかの面であればよいので

$$\frac{1}{20} \times \frac{10}{20} = \frac{10}{400}.$$

(ii) 2回目に Q_k が出るとき，
2回目に Q_1 が出るときは 3回目は $P, Q_1 \sim Q_3, R_1, R_2, R_5, R_6$ のいずれかであればよい．Q_2, Q_3 のときも同様なので

$$\frac{3}{20} \times \frac{8}{20} = \frac{24}{400}.$$

(iii) 2回目に R_k が出るとき，
2回目に R_1 が出るときは 3回目は，$P, Q_1, Q_2, R_1, R_2, R_6$ のいずれかであればよい．$R_2 \sim R_6$ のときも同様なので

$$\frac{6}{20} \times \frac{6}{20} = \frac{36}{400}.$$

したがって (i)〜(iii) より求める確率は，

$$1-\left(\frac{10}{400}+\frac{24}{400}+\frac{36}{400}\right) = \frac{33}{40}.$$

((3)の別解終り)

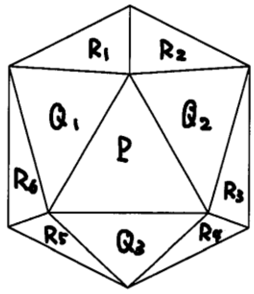
$\boxed{1}$ (つづき2)

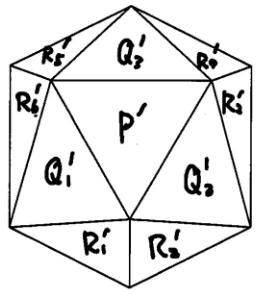
(4) $n \geqq 3$ のとき $m \leqq 3$。最初に出た面を P とする。
2回目には上から見える面が出ることはない。

(i) 2回目に P′ がえらばれるとき，3回目にどの点がえらばれても，$d(F_1, F_3) \leqq 2$ または $d(F_2, F_3) \leqq 2$ であり不適。

(ii) 2回目に Q_1' がえらばれるとき，3回目に R_3', R_4' をえらぶことで $m \geqq 3$ を満たす。しかし4回目はどこをえらんでも $m \leqq 2$ となる。2回目に Q_2', Q_3' をえらぶときも同様。

(iii) 2回目に R_1' がえらばれるとき 3回目に R_3', R_4', R_5', Q_3' をえらぶことで $m \geqq 3$ を満たす。また，3回目と4回目に $\{R_3', R_5'\}$ をえらぶことで $n=4$ のときも $m \geqq 3$ を満たす。
$n \geqq 5$ のときは $m \leqq 2$ となり不適。2回目に $R_2' \sim R_6'$ のときも同様。





(i)～(iii)より

$n=3$ のとき．$\dfrac{3}{20} \times \dfrac{2}{20} + \dfrac{6}{20} \times \dfrac{4}{20} = \dfrac{3}{40}$.

$n=4$ のとき $\dfrac{6}{20} \times {}_2C_1 \cdot \left(\dfrac{1}{20}\right)^2 = \dfrac{3}{2000}$.

$\therefore$ $n=3$ のとき $\dfrac{3}{40}$，$n=4$ のとき $\dfrac{3}{2000}$，$n \geqq 5$ のとき 0.　　　---(答)

(5) $n \leqq 10$ のとき $1 \leqq m \leqq M \leqq 4$．となるのは，任意の整数 i, j $(1 \leqq i < j \leqq n)$ に対して $d(F_i, F_j) \neq 0.5$ のときである．したがって P と P′，Q_k と Q_k'．R_k と R_k' のように反対側ある2面は，どちらか一方しか選ばれず，しかも選ばれるのは1回のみである．

したがって $n \geqq 11$ のときは $1 \leqq m \leqq M \leqq 4$ となることはなく．その確率は 0.

$n=10$ のときは異なる10面の選び方が 2^{10} であり．その選ばれる順番を考えて，その確率は

$$2^{10} \times 10! \times \left(\frac{1}{20}\right)^{10} = \frac{10!}{10^{10}} = \frac{567}{1562500}.$$

$\therefore$ $n=10$ のとき $\dfrac{567}{1562500}$，$n \geqq 11$ のとき 0.　　　---(答)

2　P$(x,\ y)$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=m\overrightarrow{\mathrm{OA}}+n\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となるとき，

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=m\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}+n\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix},\qquad \begin{cases}2m+3n=x\\4m+7n=y\end{cases}\qquad\cdots①$$

よって，$m,\ n$ が整数のとき，$x,\ y$ も整数となる．また，①を $m,\ n$ について解くと，

$$m=\frac{7x-3y}{2}=3x-y+\frac{x-y}{2},\qquad n=-2x+y$$

よって，$x,\ y$ がともに整数であるという下で，$m,\ n$ がともに整数となる条件は

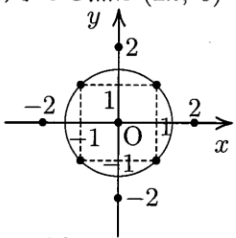
$$x-y\text{ が偶数}\quad\Longleftrightarrow\quad x\text{ と }y\text{ の偶奇が一致する}$$

となるので，集合 L は $L=\{(x,\ y)|x,\ y$ はともに整数で，かつ x と y の偶奇が一致する$\}$ となる．以上より，

(1)　$\mathrm{P}_1(1,\ 1)\in L,\quad \mathrm{P}_2(2,\ 1)\notin L,\quad \mathrm{P}_3(3,\ 1)\in L$　…(答)

(2)　x 軸上の点は $(x,\ 0)$ と表され，0 は偶数となるので，この点が L に属するには，x が偶数となればよい．よって，求める点は $(2k,\ 0)$ （k は整数）　…(答)

(3)



$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=m'\overrightarrow{\mathrm{OA'}}+n'\overrightarrow{\mathrm{OB'}}\qquad\cdots②\qquad(\mathrm{P},\ \mathrm{A'},\ \mathrm{B'}\in L)$$

L の要素のうち，O からの距離が最も近い点は O$(0,\ 0)$ で，その次に O に近い点は $(\pm1,\ \pm1)$（複号任意）である．A′ または B′ が O に一致するとき，②で表される点 P は直線上の点しか表されないので，条件を満たさない．

よって，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA'}}\right|\geqq\sqrt{2},\ \left|\overrightarrow{\mathrm{OB'}}\right|\geqq\sqrt{2}$ となる．ここで，A′$(1,\ 1)$, B′$(1,\ -1)$ として，P$(x,\ y)$ とおくと，②は

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=m'\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+n'\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\qquad \begin{cases}m'+n'=x\\m'-n'=y\end{cases}$$

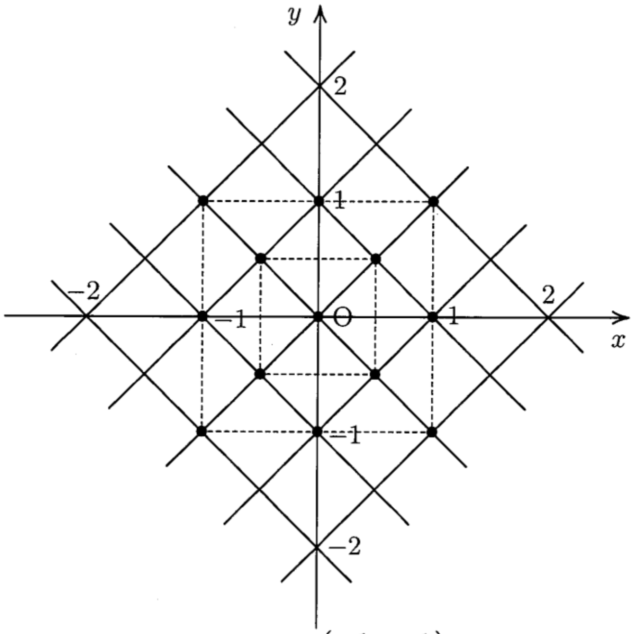
これを，$m',\ n'$ について解くと，$m'=\dfrac{x+y}{2},\ n'=\dfrac{x-y}{2}$ となり，$\mathrm{P}\in L$ より，$x,\ y$ の偶奇は一致するので，$x+y,\ x-y$ はともに偶数となり，$m',\ n'$ は整数となる．このとき，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA'}}\right|=\sqrt{2},\ \left|\overrightarrow{\mathrm{OB'}}\right|=\sqrt{2}$ となるので，求める最小値は $\sqrt{2}+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$　…(答)

(4)　2 点 $(1,\ 1),\ (1,\ -1)$ は L の要素である．ここでは Q$(x,\ y)$ とする，このとき

$$\mathrm{P}(1,\ 1)\text{ のとき，}\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=x+y$$
$$\mathrm{P}(1,\ -1)\text{ のとき，}\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=x-y$$

となるので，$x+y,\ x-y$ がともに整数であることが必要である．$|x|\leqq1\Longleftrightarrow-1\leqq x\leqq1,\ |y|\leqq1\Longleftrightarrow-1\leqq y\leqq1$ のとき，$-2\leqq x+y\leqq2,\ -2\leqq x-y\leqq2$ となるので，これをみたす $(x,\ y)$ の組は

$\boxed{2}$ （つづき 1）



$$(0,\ 0),\ (\pm1,\ 0),\ (0,\ \pm1),\ (\pm1,\ \pm1),\ \left(\pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{1}{2}\right)\quad(\text{複号任意})\qquad\cdots(*)$$

ここで，任意の L の要素 $\mathrm{P}(a,\ b)$ に対し，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=ax+by$ となり，a と b の偶奇が一致しているとき，点 $\mathrm{Q}(x,\ y)$ が $(*)$ のどの点であったとしても，$ax+by$ は整数となり条件をみたす．

以上により，求める点は

$$(0,\ 0),\ (\pm1,\ 0),\ (0,\ \pm1),\ (\pm1,\ \pm1),\ \left(\pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{1}{2}\right)\quad(\text{複号任意})\qquad\cdots(\text{答})$$

となる．

$\boxed{2}$ （つづき２）

（別解）

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=m\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}+n\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2m+3n\\4m+7n\end{pmatrix}$ と表される．

$\mathrm{P}_1(1,1)$ について

$$\begin{cases}2m+3n=1,\\4m+7n=1\end{cases}$$

の解は $(m,n)=(2,-1)$ であるから，P_1 は L に属する．　…（答）

$\mathrm{P}_2(2,1)$ について

$$\begin{cases}2m+3n=2,\\4m+7n=1\end{cases}$$

の解は $(m,n)=\left(\dfrac{11}{2},-3\right)$ であるから，P_2 は L に属さない．　…（答）

$\mathrm{P}_3(3,1)$ について

$$\begin{cases}2m+3n=3,\\4m+7n=1\end{cases}$$

の解は $(m,n)=(9,-5)$ であるから，P_3 は L に属する．　…（答）

(2) 4 と 7 は互いに素であるから，$4m+7n=0$ を満たす整数の組は

$$(m,n)=(7k,-4k)\ （k\text{ は整数}）$$

と表すことができ，このとき

$$2m+3n=2\cdot 7k+3\cdot(-4k)=2k$$

となるから，x 軸上にある点の座標は

$$(2k,0)\ （k\text{ は整数}）.$$
…（答）

(3) 2 点 A',B' の少なくとも 1 つが O と一致するとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=m'\overrightarrow{\mathrm{OA}'}+n'\overrightarrow{\mathrm{OB}'}$（$m',n'$ は整数）と表すことができない L の要素 P が存在するので，以下 O を除いて考える．

まず，L の要素 P（ただし，O を除く）について $\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|$ を考える．

(2)より，$(\pm1,0)$ は L に属していないことがわかり，(1)と同様の計算から $(0,\pm1)$ も L に属していないことがわかる．よって m,n が整数であることを考慮すると

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|=\sqrt{(2m+3n)^2+(4m+7n)^2}\geqq\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$$

が成り立つ．

ここで，L の要素について

$(m,n)=(2,-1)$ とすることで $(1,1)\in L$，$(m,n)=(5,-3)$ とすることで $(1,-1)\in L$

がわかるから，改めて $\mathrm{A}_0(1,1),\mathrm{B}_0(1,-1)$ とおくと $\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}_0}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}_0}\right|=\sqrt{2}$ であり

$\boxed{2}$（つづき３）

与条件を満たすA', B'はいずれもＯとは異なるので

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}'}\right| + \left|\overrightarrow{\mathrm{OB}'}\right| \geqq \left|\overrightarrow{\mathrm{OA}_0}\right| + \left|\overrightarrow{\mathrm{OB}_0}\right| = 2\sqrt{2}$$

が成り立つ．

次に，A', B'をそれぞれ$\mathrm{A}_0, \mathrm{B}_0$としたとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = m'\overrightarrow{\mathrm{OA}_0} + n'\overrightarrow{\mathrm{OB}_0}$から

$$\begin{cases} 2m + 3n = m' + n', \\ 4m + 7n = m' - n' \end{cases}$$

となり

$$\begin{cases} m' = 3m + 5n, \\ n' = -m - 2n \end{cases}$$

が得られるから，任意の整数m, nに対して，m', n'はともに整数となり，与条件を満たすことがわかる．

よって，求める最小値は$2\sqrt{2}$．　　…（答）

(4)　$\mathrm{Q}\left(\alpha, \beta\right)$とおく．(3)より$L$の任意の要素Ｐは

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = m'\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + n'\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}m'+n'\\m'-n'\end{pmatrix}$$

と表すことができるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \left(\alpha + \beta\right)m' + \left(\alpha - \beta\right)n'$$

が任意の整数m', n'に対して整数となる条件は$\alpha + \beta, \alpha - \beta$がともに整数であることである．

$\alpha + \beta = p$,　$\alpha - \beta = q$とおくと，$\alpha = \dfrac{p+q}{2}$,　$\beta = \dfrac{p-q}{2}$であるから，$\left|\alpha\right| \leqq 1, \left|\beta\right| \leqq 1$となる条件は

$$\begin{cases} -2 \leqq p + q \leqq 2, \\ -2 \leqq p - q \leqq 2. \end{cases}$$

これを満たす整数p, qは

$$\left(p, q\right) = \left(0, 0\right), \left(\pm 1, 0\right), \left(\pm 2, 0\right), \left(\pm 1, \pm 1\right), \left(0, \pm 1\right), \left(0, \pm 2\right) \text{（複号任意）}.$$

これらに対応する$\left(\alpha, \beta\right)$は

$$\left(\alpha, \beta\right) = \left(0, 0\right), \left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right), \left(\pm 1, 0\right), \left(0, \pm 1\right), \left(\pm 1, \pm 1\right) \text{（複号任意）}.$$　　…（答）

（別解終り）

3

(1) $f(x)=a^x$ とおく.

$f'(x)=a^x\log a$ であるから，点 $(t,\ a^t)$ における C_1 の接線の方程式は

$$y-a^t=(a^t\log a)\cdot(x-t).$$

これが原点を通ることより，$-a^t=(a^t\log a)\cdot(-t)$，すなわち，$a^t(t\log a-1)=0$.

$a^t\neq 0$ であるから，$t=\dfrac{1}{\log a}$，すなわち，$t=\log_a e$.

よって，$k=f'(\log_a e)=e\log a$ であるから，

$$a=e^{\frac{k}{e}}. \qquad \cdots(答)$$

また，接点の座標は，$(t,\ a^t)$ に $t=\log_a e$ を代入することにより，

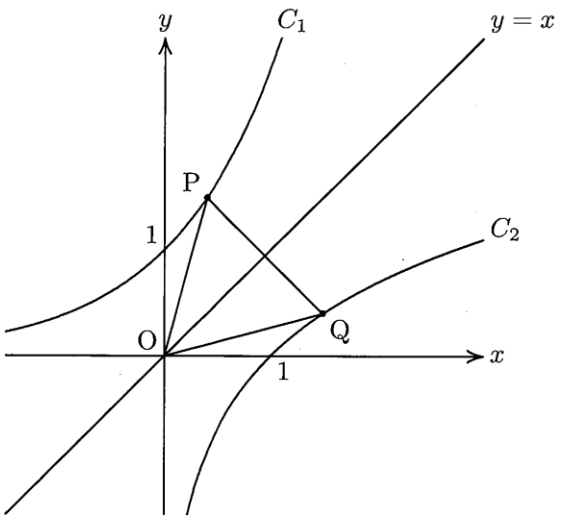
$$(\log_a e,\ e). \qquad \cdots(答)$$

(2) $f^{-1}(x)=\log_a x$ であるから，C_1 と C_2 は直線 $y=x$ に関して対称である.

よって，求める接点の座標は (1) の接点と直線 $y=x$ に関して対称な点の座標であり，その座標は，

$$(e,\ \log_a e). \qquad \cdots(答)$$

(3)



(i) P の x 座標が 0 以下のとき.

P を O のまわりに 60° だけ回転して得られる点は $x<0$ の表す領域に含まれ，P を O のまわりに -60° だけ回転して得られる点は「$x<1$ かつ $y>0$」の表す領域に含まれる.

一方，C_2 は $x<0$ の表す領域とも「$x<1$ かつ $y>0$」の表す領域とも共有点をもたない.

よって，$\triangle$ OPQ が正三角形となるような P，Q は存在しない.

3 （つづき1）

(ii) Qのy座標が0以下のとき.

QをOのまわりに$-60°$だけ回転して得られる点は$y<0$の表す領域に含まれ，QをOのまわりに$60°$だけ回転して得られる点は「$y<1$ かつ $x>0$」の表す領域に含まれる.

一方，C_1は$y<0$の表す領域とも「$y<1$ かつ $x>0$」の表す領域とも共有点をもたない.

よって，$\triangle$ OPQが正三角形となるようなP，Qは存在しない.

(i)，(ii)より，$\triangle$ OPQが正三角形となるようなP，Qが存在するとき，

PとQはいずれも第1象限にある.　$\cdots(*)$

ここで，C_1とC_2は直線$y=x$に関して対称であるから，

Pと Qを直線$y=x$に関して対称になるようにとる　$\cdots(\sharp)$

ことができ，このとき，OP = OQが成り立つ.

また，$(*)$が成り立つとき，Pの座標は$(u,\ a^u)\ (u>0)$とおけて，$\mathrm{OP}=\sqrt{u^2+a^{2u}}$と表せるから，$u$が増加すると線分OPの長さも増加する.

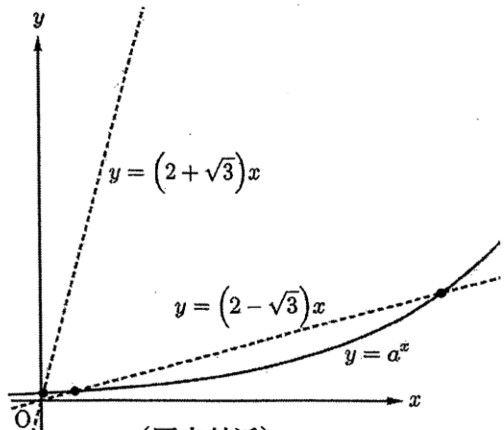
したがって，$\triangle$ OPQが正三角形となるのは，$(*)$と$(\sharp)$がともに成り立つ場合に限られ，この場合において$\triangle$ OPQが正三角形となるならば，点Pは直線$y=\{\tan(45°-30°)\}x$か直線$y=\{\tan(45°+30°)\}x$のいずれかの上にある.

よって，$\triangle$ OPQが正三角形となるようなP，Qの組の個数は「直線$y=(\tan 15°)x$とC_1の共有点の個数」と「直線$y=(\tan 75°)x$とC_1の共有点の個数」の合計に等しく，(1)の結果より，その個数は，

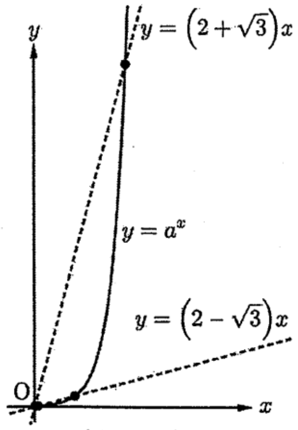
$$\begin{cases} k>\tan 75°,\ \text{すなわち，}\ a>e^{\frac{2+\sqrt{3}}{e}}\ \text{のとき，0個，} \\ k=\tan 75°,\ \text{すなわち，}\ a=e^{\frac{2+\sqrt{3}}{e}}\ \text{のとき，1個，} \\ \tan 15°<k<\tan 75°,\ \text{すなわち，}\ e^{\frac{2-\sqrt{3}}{e}}<a<e^{\frac{2+\sqrt{3}}{e}}\ \text{のとき，2個，} \\ k=\tan 15°,\ \text{すなわち，}\ a=e^{\frac{2-\sqrt{3}}{e}}\ \text{のとき，3個，} \\ k<\tan 15°,\ \text{すなわち，}\ 1<a<e^{\frac{2-\sqrt{3}}{e}}\ \text{のとき，4個.} \end{cases} \qquad \cdots(\text{答})$$

3 (つづき２)

㊟ $0 < k < \alpha$ の場合の概形は次図の通り（交点は４個）．なお，$\alpha = 2-\sqrt{3}$ である．



（原点付近）



（全体像）

㊟ $y=a^x$ のグラフと，原点を通る直線が接する場合，(1)より接点はただ１個．
$y=a^x$ のグラフは下に凸なので，原点を通る直線と交わる場合，交点は２個となることは認めている．

㊟ (※)を次のように示すこともできる．

(※)について．２点P, Qが共に第１象限にないときは，$\angle POQ > \frac{\pi}{2}$ は明らか．

点Qが第１象限にあるとき，
曲線 C_2: $y=\log_a x$ を Oのまわりに 90° 回転した曲線 C_2' は図の点線であり，
$-x=\log_a y$ より $y=a^{-x}$

このとき $OQ=OR=OP_1=OP_2$ とすると
$\angle QOR = \frac{\pi}{2}$．（$P_1$, P_2は図の点）
またP_2のy座標は1より小さく，
（P_2のy座標）<（Rのy座標）
したがって $\angle QOP_2 > \angle QOR = \frac{\pi}{2}$ となる．
よって，PをP_2の位置にとることはできない．