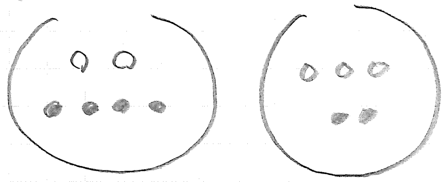
Ⅰ

(1)　A　　B



1回目の試行に関する確率は下表の通り

	A	B
赤	$\frac{1}{3}\times\frac{4}{6}=\frac{2}{9}$	$\frac{2}{3}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{15}$
白	$\frac{1}{3}\times\frac{2}{6}=\frac{1}{9}$	$\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}=\frac{6}{15}$

表より1回目で袋Aから白玉をとり出す確率は $\underline{\frac{1}{9}}$ …(ア)

1回目に白玉をとり出す確率は

$$\frac{1}{9}+\frac{6}{15}=\underline{\frac{23}{45}} \quad \cdots(イ)$$

1回目に赤玉をとり出す事象をE、選ばれた袋がAである事象をFとすると

$$P(E)=\frac{2}{9}+\frac{4}{15}=\frac{22}{45}$$

$$P(E\cap F)=\frac{2}{9}$$ 従って

$$P_E(F)=\frac{P(E\cap F)}{P(E)}=\underline{\frac{5}{11}} \quad \cdots(ウ)$$

2回目の試行に関する確率は右の4通り(i)～(iv)である

(i) 1回目にAから赤玉を取った場合

	A	B
赤	$\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}=\frac{3}{15}$	$\frac{2}{3}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{15}$
白	$\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}=\frac{2}{15}$	$\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}=\frac{6}{15}$

(ii) 1回目にBから赤玉を取った場合

	A	B
赤	$\frac{1}{3}\times\frac{4}{6}=\frac{4}{18}$	$\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{2}{12}$
白	$\frac{1}{3}\times\frac{2}{6}=\frac{2}{18}$	$\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{6}{12}$

(iii) 1回目にAから白玉を取った場合

	A	B
赤	$\frac{1}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{4}{15}$	$\frac{2}{3}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{15}$
白	$\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{15}$	$\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}=\frac{6}{15}$

(iv) 1回目にBから白玉を取った場合

	A	B
赤	$\frac{1}{3}\times\frac{4}{6}=\frac{4}{18}$	$\frac{2}{3}\times\frac{2}{4}=\frac{4}{12}$
白	$\frac{1}{3}\times\frac{2}{6}=\frac{2}{18}$	$\frac{2}{3}\times\frac{2}{4}=\frac{4}{12}$

2回目に赤玉をとり出す事象をGとすると

$$P(G)=\frac{2}{9}\left(\frac{3}{15}+\frac{4}{15}\right)+\frac{4}{15}\left(\frac{4}{18}+\frac{2}{12}\right)$$

$$+\frac{1}{9}\left(\frac{4}{15}+\frac{4}{15}\right)+\frac{6}{15}\left(\frac{4}{18}+\frac{4}{12}\right)$$

$$=\frac{66}{135}$$

Ⅰ

$P(E\cap G)=\frac{2}{9}\cdot\frac{7}{15}+\frac{4}{15}\cdot\frac{7}{18}$

$=\frac{28}{135}$

$P_G(E)=\frac{28}{135}\Big/\frac{66}{135}=\frac{14}{33}$ …(エ)

Aから6回取り出す前にBから何回取り出すかで以下の5通りの場合がある。

(i) 0回

AAAAAA と続けて取るので

$\left(\frac{1}{3}\right)^6$

(ii) 1回

A5個とBを並べ、最後にA

$\frac{6!}{5!1!}\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)$

(iii) 2回

A5個とB2個を並べ、最後にA

$\frac{7!}{5!2!}\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{3}$

(iv) 3回

A5個とB3個を並べて最後にA

$\frac{8!}{5!3!}\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\frac{1}{3}$

(v) 4回

A5個とB4個を並べて最後にA

$\frac{9!}{5!4!}\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)^4\cdot\frac{1}{3}$

求める確率は(i)〜(v)の和で、

$\frac{1}{3^6}+\frac{12}{3^7}+\frac{84}{3^8}+\frac{448}{3^9}+\frac{2016}{3^{10}}$

$=\frac{1507}{19683}$ …(オ)

$\boxed{\text{Ⅰ}}$

(2) $\overrightarrow{AB}=(2-6\sqrt{3},\ 52,\ -52)$ より

$|\overrightarrow{AB}|^2=(2-6\sqrt{3})^2+52^2+(-52)^2$

$=\underline{24(230-\sqrt{3})}$ …(カ)

$\overrightarrow{OH}=(x,\ y,\ z)$ とすると

$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{AB}$ (kは実数)と

書けるので

$x=6\sqrt{3}+k(2-6\sqrt{3})$

$y=3\sqrt{3}-25+52k$

$z=3\sqrt{3}+26-52k$ である。

$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ より

$(2-6\sqrt{3})(6\sqrt{3}+2k-6k\sqrt{3})$

$+52(3\sqrt{3}-25+52k)$

$-52(3\sqrt{3}+26-52k)=0$

まとめると

$\sqrt{3}-230+(460-2\sqrt{3})k=0$

$\therefore\ k=\dfrac{1}{2}$

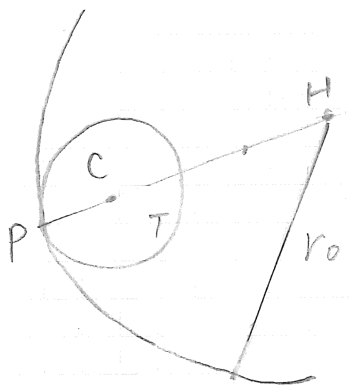
このとき $x=3\sqrt{3}+1$,

$y=3\sqrt{3}+1$

$z=\underline{3\sqrt{3}}$ ……(キ)

$|\overrightarrow{CH}|=\sqrt{(3\sqrt{3}+1-1)^2+(3\sqrt{3}+1-1)^2+(3\sqrt{3})^2}$

$=9$.



T が S_r に内接するとき $r=r_0$

となり $r_0=9+3=\underline{12}$ …(ク)

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OC}+\dfrac{3}{9}(-\overrightarrow{CH})$

$=(1-\sqrt{3},\ 1-\sqrt{3},\ -\sqrt{3})$ となり

点Pのz座標は $\underline{-\sqrt{3}}$ …(ケ)

S_{r_0}を表す方程式は

$\{x-(3\sqrt{3}+1)\}^2+\{y-(3\sqrt{3}+1)\}^2+(z-3\sqrt{3})^2=12^2$

$z=0$として

$\{x-(3\sqrt{3}+1)\}^2+\{y-(3\sqrt{3}+1)\}^2=117$

xy平面と交わってできる

円の半径は $\sqrt{117}$

$=\underline{3\sqrt{13}}$ …(コ)

Ⅱ

$a_1=1,\ a_2=1$ …①

$a_{n+2}=a_{n+1}+\dfrac{10(9-n)}{(n+2)(n+1)}a_n$ …②

$b_n=a_{n+1}+\dfrac{9-n}{n+1}a_n$ …③

(1) ②に $n=1$ を代入した式を用いて

$$a_3=a_2+\frac{10\cdot 8}{3\cdot 2}a_1$$
$$=1+\frac{40}{3}=\frac{43}{3}\ \cdots(答)$$

③に $n=1,2$ を代入した式を用いて，

$$b_1=a_2+\frac{8}{2}a_1=5$$
$$=1+4=5\ \cdots(答)$$
$$b_2=a_3+\frac{7}{3}a_2$$
$$=\frac{43}{3}+\frac{7}{3}=\frac{50}{3}\ \cdots(答)$$

(2) $$b_{n+1}=a_{n+2}+\frac{8-n}{n+2}a_{n+1}$$
$$=a_{n+1}+\frac{10(9-n)}{(n+2)(n+1)}a_n+\frac{8-n}{n+2}a_{n+1}$$
$$=\frac{10}{n+2}a_{n+1}+\frac{10(9-n)}{(n+2)(n+1)}a_n$$
$$=\frac{10}{n+2}\left(a_{n+1}+\frac{9-n}{n+1}a_n\right)$$
$$=\frac{10}{n+2}b_n$$

より，

$$c_n=\frac{10}{n+2}\ \cdots(答)$$

(3) (2)を用いると，$n\geqq 2$ のとき

$$b_n=\frac{10}{n+1}b_{n-1}$$
$$=\underbrace{\frac{10}{n+1}\cdot\frac{10}{n}\cdot\cdots\cdot\frac{10}{3}}_{n-1\text{個}}b_1$$
$$=\frac{2\cdot 10^{n-1}}{(n+1)!}\cdot 5$$

これは $n=1$ のときも成り立つので

$$b_n=\frac{10^n}{(n+1)!}\ \cdots(答)$$

(4) (3)の結果より

$$a_{n+1}+\frac{9-n}{n+1}a_n=\frac{10^n}{(n+1)!}$$

すなわち

$$a_{n+1}=-\frac{9-n}{n+1}a_n+\frac{10^n}{(n+1)!}\ \cdots④$$

①より

$$a_1=a_2$$

$n=1,2,3,\cdots,8$ のとき②より

$$a_{n+2}=a_{n+1}+\frac{10(9-n)}{(n+2)(n+1)}a_n$$
$$>a_{n+1}$$

であるから

$$a_2<a_3<\cdots<a_{10}$$

また $n=9$ を②，④に代入して

$$a_{11}=a_{10}=\frac{10^9}{10!}$$

$n\geqq 12$ のとき

$$a_n<\frac{10^9}{10!}\ \cdots(*)$$

であることを数学的帰納法で示す

Ⅱ

(Ⅰ) $n=11$ を④に代入して,

$$a_{12}=\frac{1}{6}a_{11}+\frac{10^{11}}{12!}$$
$$=\frac{1}{6}\cdot\frac{10^9}{10!}+\frac{10^{11}}{12!}$$
$$=\left(\frac{1}{6}+\frac{10^2}{12\cdot 11}\right)\frac{10^9}{10!}$$
$$=\frac{122}{132}\cdot\frac{10^9}{10!}<\frac{10^9}{10!}$$

より, $n=12$ のとき(*)は成り立つ

(Ⅱ) $n=k$ $(k\geqq 12)$ のとき, (*)が成り立つと仮定する. ④より

$$a_{k+1}=-\frac{9-k}{k+1}a_k+\frac{10^k}{(k+1)!}$$
$$<\frac{k-9}{k+1}\cdot\frac{10^9}{10!}+\frac{10^k}{(k+1)!}$$
$$<\frac{10^9}{10!}\left(\frac{k-9}{k+1}+\frac{10^{k-9}}{(k+1)\cdot k\cdots 11}\right)$$
$$=\frac{10^9}{10!}\left(1-\frac{10}{k+1}+\frac{10}{k+1}\cdot\frac{10}{k}\cdots\frac{10}{11}\right)$$
$$<\frac{10^9}{10!}$$

$\left(\begin{array}{l} k\geqq 12 \text{ のとき} \\ \frac{10}{k+1}\cdot\frac{10}{k}\cdots\frac{10}{11}<\frac{10}{k+1} \text{ より}\end{array}\right)$

よって $n=k+1$ のときも(*)は成り立つ.

(Ⅰ), (Ⅱ) より示せた.

以上より, すべての自然数 n について $a_n\leqq a_{m_0}$ が成り立つような m_0 の値は

$$m_0=10,\ 11$$

また

$$(10!)\cdot a_{10}=(10!)a_{11}=10^9$$

以上より

$$(m_0,\ (10!)a_{10})=(10,\ 10^9),\ (11,\ 10^9)$$

…(答)

$\boxed{\text{III}}$

(1)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{\sin^2 x + \cos^2(x+\alpha)\} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{1+\cos 2(x+\alpha)}{2} \right\} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{ 1 - \sin(2x+\alpha)\sin\alpha \} dx$$

$$= \left[x + \frac{1}{2}\sin\alpha\cos(2x+\alpha) \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin 2\alpha$$

$$= \frac{\pi}{2} - u\sqrt{1-u^2} \quad (答)$$

(2)

$f'(x) = 2\sin x\cos x - 2\sin(x+\alpha)\cos(x+\alpha)$

条件より　$f'(x_0) = 0$　…①

かつ　$f(x_0) = c$　…②

である。

①より

$\sin x_0 \cos x_0 - \sin(x_0+\alpha)\cos(x_0+\alpha) = 0$

加法定理で展開してまとめると

$\sin^2\alpha \cdot \sin 2x_0 = \cos 2x_0 \cdot \sin\alpha\cos\alpha$

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ より　$\sin\alpha \neq 0$ であるから

上式より

$\cos\alpha \cdot \cos 2x_0 - \sin\alpha \sin 2x_0 = 0$

$\therefore \cos(\alpha + 2x_0) = 0$　…③

$0 \leqq 2x \leqq \pi$ より

$0 \leqq \alpha + 2x_0 < \frac{3}{2}\pi$ であり

③より　$\alpha + 2x_0 = \frac{\pi}{2}$

$\therefore x_0 = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$　(答)

次に②より

$c = f(x_0)$

$= \sin^2 x_0 + \cos^2(x_0+\alpha)$

$= \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)$

$= 1 - \sin\alpha = 1 - u$　(答)

(3)

$$V_1 + V_2 = \int_0^{x_0} \pi(f(x)-c)^2 dx + \int_{x_0}^{\frac{\pi}{2}} \pi(f(x)-c)^2 dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi(f(x)-c)^2 dx$$

$$\frac{V_1+V_2}{\pi} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{f(x)\}^2 dx - 2c\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx + c^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx$$

ここで

$f(x) = \sin^2 x + \cos^2(x+\alpha)$

$= 1 - u\sin(2x+\alpha)$ と変形できて、

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \{f(x)\}^2 dx = [x]_0^{\frac{\pi}{2}} + u[\cos(2x+\alpha)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{u^2}{2}\left[x - \frac{1}{4}\sin(4x+2\alpha)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{2} - 2u\cos\alpha + \frac{\pi}{4}u^2$$

III

従って

$$\frac{V_1+V_2}{\pi}=\frac{\pi}{2}-2u\cos\alpha+\frac{\pi}{4}u^2$$

$$-2c\left(\frac{\pi}{2}-u\sqrt{1-u^2}\right)+\frac{\pi}{2}c^2$$

$$=\frac{3}{4}\pi u^2-2u^2\sqrt{1-u^2}$$

$(\because c=1-u)$

$$\therefore \frac{V_1+V_2}{\pi u^2}=\frac{3}{4}\pi-2\sqrt{1-u^2} \quad (答)$$

IV

$$\begin{cases} f_0(x) = x^{-\log x} \\ f_n(x) = x\dfrac{d}{dx}f_{n-1}(x) \end{cases}$$

(1) $h(t) = \left(1+\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\frac{t^k}{k!}\right)e^{-t}$

$= \left(1+t+\dfrac{t^2}{2!}+\cdots+\dfrac{t^m}{m!}\right)e^{-t}$

$\dfrac{d}{dt}h(t) = \left(1+t+\cdots+\dfrac{t^{m-1}}{(m-1)!}\right)e^{-t}$

$-\left(1+t+\cdots+\dfrac{t^m}{m!}\right)e^{-t}$

$= -\dfrac{t^m}{m!}e^{-t}$ …(答)

(2) $\dfrac{d}{dt}h(t) < 0$ より，$h(t)$ は単調減少

であり，

$h(0) = 1$

であるから，

$h(t) < 1 \quad (t > 0)$

すなわち

$1+t+\dfrac{t^2}{2!}+\cdots+\dfrac{t^m}{m!} < e^t$

が成立つ．よって

$e^t > \dfrac{t^m}{m!} \quad (t>0)$

すなわち

$e^{t^2} > \dfrac{t^{2m}}{m!}$

が成立つ　　　(証明終)

(3) $f_n(x) = x\dfrac{d}{dx}f_{n-1}(x)$

$x = e^u$ と変数変換すると，

$f_n(e^u) = e^u\dfrac{d}{dx}f_{n-1}(e^u)$

$f_n(e^u) = e^u\dfrac{du}{dx}\cdot\dfrac{d}{du}f_{n-1}(e^u)$

$\dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{\frac{dx}{du}} = \dfrac{1}{e^u}$ より

$f_n(e^u) = \dfrac{d}{du}f_{n-1}(e^u)$ …①

また

$f_n(x) = g_n(x)\,x^{-\log x}$

$f_n(e^u) = g_n(e^u)\,e^{-u^2}$

$= \ell_n(u)\,e^{-u^2}$

であるから，これを①に代入すると

$\ell_n(u)e^{-u^2} = \dfrac{d}{du}\ell_{n-1}(u)e^{-u^2} + \ell_{n-1}(u)(-2u)e^{-u^2}$

$\ell_n(u) = \dfrac{d}{du}\ell_{n-1}(u) - 2u\,\ell_{n-1}(u)$ …②

また $f_0(e^u) = e^{-u^2}$ より

$\ell_0(u) = 1$ …③

これを②に代入して

$\ell_1(u) = -2u$

$n \geqq 1$ のとき，

$\ell_n(u)$ は u^n の係数が $(-2)^n$ の

u の n 次式である …(*)

ことを数学的帰納法で示す

IV

(I) $l_1(u) = -2u$ より

$n=1$ のとき(*)は成り立つ.

(II) $n=k$ のとき(*)が成り立つと仮定すると

$$l_k(u) = (-2)^k u^k + \left[\begin{array}{c} u\text{の}k-1\text{次以下} \\ \text{の多項式} \end{array}\right]$$

と表せる. ②より

$$l_{k+1}(u) = \frac{d}{du} l_k(u) - 2u\, l_k(u)$$

$$= \left[\begin{array}{c} u\text{の}k\text{次以下} \\ \text{の多項式} \end{array}\right] + (-2)^{k+1} u^{k+1} + \left[\begin{array}{c} u\text{の}k\text{次以下} \\ \text{の多項式} \end{array}\right]$$

$$= (-2)^{k+1} u^{k+1} + \left[\begin{array}{c} u\text{の}k\text{次以下} \\ \text{の多項式} \end{array}\right]$$

よって $n=k+1$ のときも(*)は成り立つ

(I), (II)より $n \geqq 1$ のすべての自然数 n で

$$\begin{cases} l_n(u) \text{ は } n \text{次式} \\ l_n(u) \text{ の } u^n \text{ の係数は } (-2)^n \end{cases} \cdots (\text{答})$$

であることが示せた.

(4) $\displaystyle \int_{\frac{1}{b}}^{b} \{f_n(x)\}^2 x^{\log x - 1} dx$

$$= \int_{-\log b}^{\log b} \{f_n(e^u)\}^2 e^{u^2} du$$

$$\left(\begin{array}{l} x = e^u \text{と置換した} \\ dx = e^u du \\ \quad = x\, du \end{array} \quad \begin{array}{c|c} x & \frac{1}{b} \to b \\ \hline u & -\log b \to \log b \end{array} \right)$$

$$= \int_{-\alpha}^{\alpha} \left(l_n(u) e^{-u^2}\right)^2 e^{u^2} du$$

($\alpha = \log b$ とおいた)

$$= \int_{-\alpha}^{\alpha} \{l_n(u)\}^2 e^{-u^2} du$$

$$= 2\int_0^{\alpha} \{l_n(u)\}^2 e^{-u^2} du$$

$b \to \infty$ のとき $\alpha \to \infty$ であるから

$$I_0 = \lim_{\alpha \to \infty} 2\int_0^{\alpha} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi} \cdots (\text{答})$$

また

$$\int_0^{\alpha} \{l_1(u)\}^2 e^{-u^2} du$$

$$= 4\int_0^{\alpha} u^2 e^{-u^2} du = -2\int_0^{\alpha} u \left(e^{-u^2}\right)' du$$

$$= -2\left\{ \left[u e^{-u^2}\right]_0^{\alpha} - \int_0^{\alpha} e^{-u^2} du \right\}$$

$$= -2\alpha e^{-\alpha^2} + 2\int_0^{\alpha} e^{-u^2} du$$

(2)で $m=1$, $t=\alpha$ とすれば

$$\alpha^2 < e^{\alpha^2}$$

であるから

$$e^{-\alpha^2} < \frac{1}{\alpha^2}$$

したがって

$$0 < \alpha e^{-\alpha^2} < \frac{1}{\alpha}$$

が成り立つ.

$\displaystyle \lim_{\alpha \to \infty} \frac{1}{\alpha} = 0$ と はさみうちの原理より

$$\lim_{\alpha \to \infty} \alpha e^{-\alpha^2} = 0$$

以上より

$$I_1 = \lim_{\alpha \to \infty} 2\int_0^{\alpha} \{l_1(u)\}^2 e^{-u^2} du$$

$$= \lim_{\alpha \to \infty} 4\int_0^{\alpha} e^{-u^2} du = 2\sqrt{\pi} \cdots (\text{答})$$

IV

(5) $I_n = 2\lim_{\alpha\to\infty}\int_0^\alpha \{l_n(u)\}^2 e^{-u^2}du$

$= 2\lim_{\alpha\to\infty}\int_0^\alpha l_n(u)\cdot l_n(u)e^{-u^2}du$

$= 2\lim_{\alpha\to\infty}\int_0^\alpha l_n(u)f_n(e^u)du$

$n \geqq 1$ のとき

$\int_0^\alpha l_n(u)f_n(e^u)du$

$= \int_0^\alpha l_n(u)\{f_{n-1}(e^u)\}'du$

$= \Big[l_n(u)f_{n-1}(e^u)\Big]_0^\alpha - \int_0^\alpha l_n'(u)f_{n-1}(e^u)du$

$= (l_n(\alpha))^2e^{-\alpha^2} - \int_0^\alpha l_n'(u)f_{n-1}(e^u)du$

(2) で $m = n+1$，$t = \alpha$ とすれば

$$e^{\alpha^2} > \frac{\alpha^{2n+2}}{(n+1)!}$$

であるから $e^{-\alpha^2} < \dfrac{(n+1)!}{\alpha^{2n+2}}$

したがって

$$0 < (l_n(\alpha))^2e^{-\alpha^2} < (n+1)!\frac{(l_n(\alpha))^2}{\alpha^{2n+2}}$$

$(l_n(\alpha))^2$ は $2n$ 次の多項式であるから

$$\lim_{\alpha\to\infty}(n+1)!\frac{(l_n(\alpha))^2}{\alpha^{2n+2}} = 0$$

はさみうちの原理より

$$\lim_{\alpha\to\infty}(l_n(\alpha))^2e^{-\alpha^2} = 0$$

したがって

$$I_n = 2\lim_{\alpha\to\infty}\left(-\int_0^\alpha l_n'(u)f_{n-1}(e^u)du\right)$$

これを繰り返せば

$$I_n = 2\lim_{\alpha\to\infty}\left\{(-1)^n\int_0^\alpha l_n^{(n)}(u)f_0(e^u)du\right\}$$

(3) より $l_n(u)$ は

$$l_n(u) = (-2)^n u^n + \left[\begin{array}{l} u \text{の} n-1 \text{次} \\ \text{以下の多項式} \end{array}\right]$$

であるから，

$$l_n^{(n)}(u) = (-2)^n n!$$

したがって

$$I_n = 2\lim_{\alpha\to\infty}2^n n!\int_0^\alpha f_0(e^u)du$$

$$= 2\lim_{\alpha\to\infty}2^n n!\int_0^\alpha e^{-u^2}du$$

$$= 2^n n!\sqrt{\pi} \quad \cdots(答)$$

（これは $n=0$ のときも成り立つ）

IV

別解

(5) 関数列 $\{\ell_n(u)\}$ は

$$\begin{cases} \ell_0(u)=1,\ \ell_1(u)=-2u \\ \ell_n(u)=\ell_{n-1}'(u)-2u\,\ell_{n-1}(u) \cdots ② \end{cases}$$

を満たす.

$n \geqq 1$ のすべての自然数 n で

$$\ell_n'(u)=-2n\,\ell_{n-1}(u) \cdots (*)$$

が成り立つことを数学的帰納法で示す

(I) $\ell_2(u)=\ell_1'(u)-2u\,\ell_1(u)$

$$=4u^2-2$$

であるから,

$$\begin{cases} \ell_1'(u)=-2=-2\cdot 1\cdot \ell_0(u) \\ \ell_2'(u)=8u=-2\cdot 2\,\ell_1(u) \end{cases}$$

よって $n=1,2$ のとき, $(*)$ は成り立つ

(II) $n=k,\ k+1$ で $(*)$ は成り立つと仮定すると

$$\begin{cases} \ell_k'(u)=-2k\,\ell_{k-1}(u) \\ \ell_{k+1}'(u)=-2(k+1)\,\ell_k(u) \end{cases}$$

$$\ell_{k+2}(u)=\ell_{k+1}'(u)-2u\,\ell_{k+1}(u)$$

$$=-2(k+1)\,\ell_k(u)-2u\,\ell_{k+1}(u)$$

$$\ell_{k+2}'(u)=-2(k+1)\,\ell_k'(u)-2\ell_{k+1}(u)-2u\,\ell_{k+1}'(u)$$

$$=-2(k+1)\left(\ell_{k+1}(u)+2u\,\ell_k(u)\right)-2\,\ell_{k+1}(u)+4(k+1)u\,\ell_k(u)$$

$$=-2(k+2)\,\ell_{k+1}(u)$$

よって $n=k+2$ で $(*)$ は成り立つ.

(I), (II) より示せた.

(本解)と同様にして

$$I_n=2\lim_{\alpha\to\infty}\int_0^\alpha \{\ell_n(u)\}^2 e^{-u^2}\,du$$

$$=2\lim_{\alpha\to\infty}\left\{-\int_0^\alpha \ell_n'(u)\,f_{n-1}(e^u)\,du\right\}$$

$$=2\lim_{\alpha\to\infty}\left\{2n\int_0^\alpha \ell_{n-1}(u)\,f_{n-1}(e^u)\,du\right\}$$

($(*)$ より)

$$=2n\,I_{n-1}$$

これを用いると

$$I_n=2n\cdot 2(n-1)\cdot\cdots\cdot 2\cdot I_0$$

$$=2^n n!\sqrt{\pi} \quad \cdots(答)$$

(これは $n=0$ のときも成り立つ)