Ⅰ

(1) $a=1$，かつ $1<b<c$ を満たす (a,b,c) の組は，2〜5までの整数から2数を選んで小さい順に b,c とする方法に等しく，

$${}_4C_2=\boxed{6}\ (\text{通り})\ \cdots(\text{ア})$$

である．$a\leqq b\leqq c$ を満たす (a,b,c) については，$b=k\ (k=1,2,3,4,5)$ と固定すると，(a,c) は $k(6-k)$ 通りであるから，$a\leqq b\leqq c$ を満たす (a,b,c) の組は，

$$\sum_{k=1}^{5}k(6-k)=5+8+9+8+5$$
$$=\boxed{35}\ (\text{通り})\ \cdots(\text{イ})$$

（別解）

$a\leqq b\leqq c$ を満たす (a,b,c) の組は，1〜5までの整数から重複を許して3数を選んで大きくない順に a,b,c とする方法に等しく，

$${}_5H_3={}_7C_3=\boxed{35}\ (\text{通り})\ \cdots(\text{イ})$$

(2)

$$\begin{array}{r|l} & x^2+4 \\ \hline x^2-4 & x^4 \\ & x^4-4x^2 \\ \hline & 4x^2 \\ & 4x^2-16 \\ \hline & 16 \end{array}$$

x^4 を x^2-4 で割ったとき

商 $\boxed{x^2+4}$ …(ウ)

余り $\boxed{16}$ …(エ)

$$\begin{array}{r|l} & x^4-4x^2+16 \\ \hline x^2+4 & x^6 \\ & x^6+4x^4 \\ \hline & -4x^4 \\ & -4x^4-16x^2 \\ \hline & 16x^2 \\ & 16x^2+64 \\ \hline & -64 \end{array}$$

x^6 を x^2+4 で割ったとき

商 $\boxed{x^4-4x^2+16}$ …(オ)

余り $\boxed{-64}$ …(カ)

x^{2n} を2次式 x^2-4 で割ったときの余りは $ax+b$ (a,b：定数) とおける．商を $Q(x)$ とおくと，

$$x^{2n}=(x^2-4)Q(x)+ax+b$$

$x=\pm2$ として

$$\begin{cases}4^n=2a+b\\4^n=-2a+b\end{cases}$$

これより，$a=0$，$b=4^n$ であり，

$$ax+b=\boxed{4^n}\ \cdots(\text{キ})$$

x^{2n} を2次式 x^2+4 で割ったときの余りは $cx+d$ (c,d：実数) とおける．商を $L(x)$ とおくと，

$$x^{2n}=(x^2+4)L(x)+cx+d$$

$x=2i$ として

$$(-4)^n=2ci+d$$

x^{2n}，x^2+4 の係数は実数より，c,d も実数で，これより，$c=0$，$b=(-4)^n$ であり，

$$cx+d=\boxed{(-4)^n}\ \cdots(\text{ク})$$

(3) クラスAの10人の得点を $x_1,x_2,\cdots,x_{10}$
クラスBの15人の得点を $y_1,y_2,\cdots,y_{15}$
とすると，与えられた条件より

$$\begin{cases}\frac{1}{10}(x_1+x_2+\cdots+x_{10})=50\\ \frac{1}{15}(y_1+y_2+\cdots+y_{15})=70\end{cases}$$

クラスA，Bを合わせた25人のテストの得点の平均点は，

$$\frac{1}{25}(x_1+x_2+\cdots+x_{10}+y_1+y_2+\cdots+y_{15})$$
$$=\frac{1}{25}(50\times10+70\times15)$$
$$=10\times2+14\times3$$
$$=\boxed{62}\ \cdots(\text{ケ})$$

分散については，与えられた条件より，

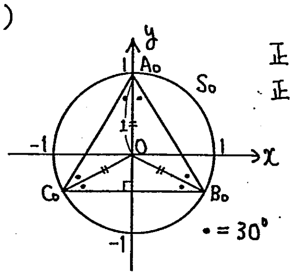
$$\begin{cases}\frac{1}{10}(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{10}^2)-50^2=s^2\\ \frac{1}{15}(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_{15}^2)-70^2=t^2\end{cases}$$

クラスA，Bを合わせた25人のテストの得点の分散は，

$$\frac{1}{25}(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{10}^2+y_1^2+y_2^2+\cdots+y_{15}^2)-62^2$$
$$=\frac{1}{25}(10s^2+50^2\times10+15t^2+70^2\times15)-62^2$$
$$=\boxed{\frac{2}{5}s^2+\frac{3}{5}t^2+96}\ \cdots(\text{コ})$$

Ⅱ

(1)



正三角形 $A_0B_0C_0$ において正弦定理を用いると,

$$\frac{B_0C_0}{\sin 60^\circ} = 2\times 1,$$

$$B_0C_0 = 2\sin 60^\circ$$
$$= \sqrt{3}. \cdots(答)$$

正三角形 $A_0B_0C_0$ の外心Oは 内心でもあるから, 上図のようであり,

$$B_0\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) \cdots(答)$$

(2) S_1 の中心は正三角形 $A_0B_0C_0$ の内心 O であるから, S_1 の中心の座標は,

$$O(0, 0). \cdots(答)$$

S_1 の半径を r_1 とすると, 正三角形 $A_0B_0C_0$ の面積に注目して,

$$(\triangle A_0B_0C_0 =)\ \frac{1}{2}(B_0C_0)^2\sin 60^\circ = \frac{r_1}{2}\cdot(A_0B_0+B_0C_0+C_0A_0)$$

$B_0C_0=\sqrt{3}$ より,

$$\frac{3\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}r_1.$$

$$r_1 = \frac{1}{2}. \cdots(答)$$

(3) S_n は正三角形 $A_nB_nC_n$ の外接円であり, S_{n+1} は正三角形 $A_nB_nC_n$ の内接円であるから, 正三角形 $A_nB_nC_n$ の一辺の長さを l_n として,

$$\begin{cases} \dfrac{l_n}{\sin 60^\circ} = 2r_n, \ (正弦定理より) \cdots ① \\ \dfrac{1}{2}l_n^2\sin 60^\circ = \dfrac{r_{n+1}}{2}(l_n+l_n+l_n). \left(\begin{array}{c}\triangle A_nB_nC_n \\ の面積について\end{array}\right) \cdots ② \end{cases}$$

①より,

$$l_n = \sqrt{3}r_n. \cdots ③$$

②より,

$$\frac{\sqrt{3}}{4}l_n^2 = \frac{3}{2}l_n r_{n+1}.$$

$l_n>0$ より

$$r_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{6}l_n$$
$$= \frac{1}{2}r_n. \ (③より) \cdots(答)$$

(4) S_0 の中心は O である. …④

S_k (k は0以上の整数) の中心が O のとき, O は正三角形 $A_kB_kC_k$ の外心であり, 内心である. S_{k+1} は正三角形 $A_kB_kC_k$ の内接円なので, その中心は O である. …⑤

④,⑤ より 数学的帰納法 から

$$S_n の中心の座標は O(0, 0). \cdots(答)$$

(3)より

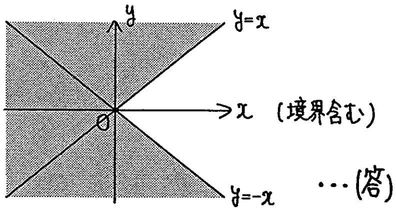
$$r_{n+1} = r_0\left(\frac{1}{2}\right)^n$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n. \ (r_0=1 より) \cdots(答)$$

Ⅲ

(1) $x \leqq |y|$ の表す領域は

$$\begin{cases} x \leqq y \\ y \geqq 0 \end{cases} \text{と} \begin{cases} -x \geqq y \\ y \leqq 0 \end{cases}$$

が表す領域の和集合であり、次の網掛け部分である。



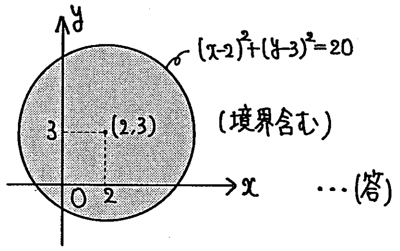
…(答)

(2)

$$x^2+y^2 \leqq 7+4x+6y$$

$$(x-2)^2+(y-3)^2 \leqq 20$$

であるから求める領域は次の網掛け部分である。



…(答)

(3)

$$D_1:\ x^2+y^2+13 \leqq 20+|4x+6y|$$

は、領域

$$K_1:\begin{cases} x^2+y^2 \leqq 7+4x+6y, \\ 2x+3y \geqq 0 \end{cases}$$

と領域

$$K_2:\begin{cases} x^2+y^2 \leqq 7-4x-6y, \\ 2x+3y \leqq 0 \end{cases}$$

の和集合である。

$$(x,y) \in K_1 \iff (-x,-y) \in K_2$$

であるから K_1 と K_2 は原点に関して対称である。

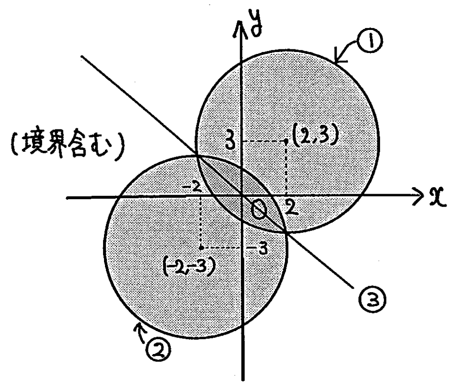
$(x-2)^2+(y-3)^2=20$ …①

$(x+2)^2+(y+3)^2=20$ …②

$2x+3y=0$ …③ ((②−①)÷4より)

直線③は、2円①と②の2交点を通る。

(2)もふまえると D_1 は次の網掛け部分である。



…(答)

(4) (3)と同様に2つに分けて D_t を考える。

D_t は領域

$$T_1:\begin{cases} (x-2t)^2+\left(y-\frac{3}{t}\right)^2 \leqq 20 \\ 2tx+\frac{3}{t}y \geqq 0 \end{cases}$$

領域

$$T_2:\begin{cases} (x+2t)^2+\left(y+\frac{3}{t}\right)^2 \leqq 20 \\ 2tx+\frac{3}{t}y \leqq 0 \end{cases}$$

の和集合である。

$(x-2t)^2+\left(y-\frac{3}{t}\right)^2=20$ …④

$(x+2t)^2+\left(y+\frac{3}{t}\right)^2=20$ …⑤

$2tx+\frac{3}{t}y=0$ …⑥ ((⑤−④)÷4より)

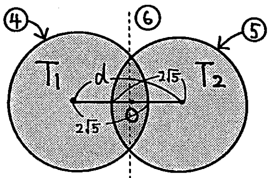
2円④,⑤が2交点をもつとき直線⑥はその2交点を通る

2中心 $\left(2t,\frac{3}{t}\right)$, $\left(-2t,-\frac{3}{t}\right)$ の距離を d とすると,

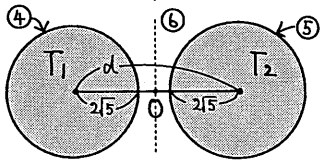
$$d=\sqrt{(2t+2t)^2+\left(\frac{3}{t}+\frac{3}{t}\right)^2}$$

$$=2\sqrt{4t^2+\frac{9}{t^2}}.$$

$d \leqq 4\sqrt{5}$ のとき



$d \geqq 4\sqrt{5}$ のとき



Ⅲ

円④, ⑤の半径がともに $2\sqrt{5}$（一定）であるから，
この2円が共有点をもたないまたは外接するとき
（$d \geqq 4\sqrt{5}$ のとき）$S(t)$ は最大値 $\pi(2\sqrt{5})^2 \times 2$ をとる．

$$d \geqq 4\sqrt{5} \iff 4t^2+\frac{9}{t^2} \geqq 20$$
$$\iff 4t^4-20t^2+9 \geqq 0$$
$$\iff (2t^2-1)(2t^2-9) \geqq 0$$
$$\iff t^2 \leqq \frac{1}{2},\ \frac{9}{2} \leqq t^2.$$

以上から，$S(t)$ の最大値は，

$$40\pi. \quad \cdots(答)$$

$S(t)$ が最大となる t の値の範囲は

$$0<t \leqq \frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{3}{\sqrt{2}} \leqq t. \quad \cdots(答)$$

(5) (4) の d において，（相加平均）$\geqq$（相乗平均）より，

$$d \geqq 2\sqrt{2\sqrt{4t^2\cdot\frac{9}{t^2}}}$$
$$= 4\sqrt{3}.$$

等号成立条件は，

$$4t^2=\frac{9}{t^2}\ (t>0) \quad すなわち \quad t=\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

$S(t)$ が最小となるのは，d が最小となるときであるから，求める t の値は，

$$\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}. \quad \cdots(答)$$