[I]

直線 ℓ は, 負の数 a と, 2 より大きい数 b を用いて

$$y = ax + b$$

とおける．このとき, x 軸, y 軸との交点は順に

$$\mathrm{A}\left(-\frac{b}{a}, 0\right), \qquad \mathrm{B}(0, b) \qquad \cdots ①$$

となる．三角形 OAB の面積 $\triangle\mathrm{OAB}$ は $S+T$ に半径 1 の半円の面積 $\pi \cdot 1^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}$ を足したものなので, $\triangle\mathrm{OAB}$ がいつ最小になるかを調べればよい．

ℓ と $(0,1)$ との距離が 1 より, 点と直線の距離の公式から,

$$\frac{|a \cdot 0 - 1 + b|}{\sqrt{a^2+1}} = 1,$$
$$|b-1| = \sqrt{a^2+1},$$
$$b^2 - 2b = a^2.$$

$a < 0$ より,

$$a = -\sqrt{b^2-2b}. \qquad \cdots ②$$

よって,

$$\triangle\mathrm{OAB} = \frac{1}{2}\left(-\frac{b}{a}\right)b = \frac{b^2}{2\sqrt{b^2-2b}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b^3}{b-2}}.$$

$f(b) = \dfrac{b^3}{b-2}$ とおくと, 商の微分の公式より

$$f'(b) = \frac{3b^2(b-2) - b^3}{(b-2)^2} = \frac{2b^3 - 6b^2}{(b-2)^2} = \frac{2b^2(b-3)}{(b-2)^2}.$$

よって, 増減表は右のようになる．

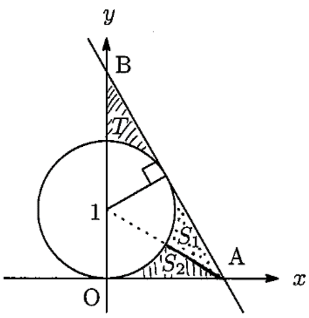
b	2	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(b)$		$-$	0	$+$
$f(b)$		↘	27	↗

$b=3$ のとき, $f(b)$ が最小であるから $\triangle\mathrm{OAB}$ も最小である．このとき, ①, ② より

$$a = -\sqrt{3}, \qquad \mathrm{A}\left(\sqrt{3}, 0\right), \qquad \mathrm{B}(0, 3)$$

となる．よって, 右図の三角形 OAB において $\angle\mathrm{OAB} = 60^\circ$, $\angle\mathrm{ABO} = 30^\circ$ となり, T, S_1, S_2 の部分は合同であるから,

$$S - T = (S_1 + S_2) - T = S_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}. \qquad \cdots \text{(答)}$$



【補足】　T, S_1, S_2 の部分が合同であることに気付かなくても,

$$S + T + \frac{\pi}{2} = \triangle\mathrm{OAB} = \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot 3$$

より

$$S + T = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{2}$$

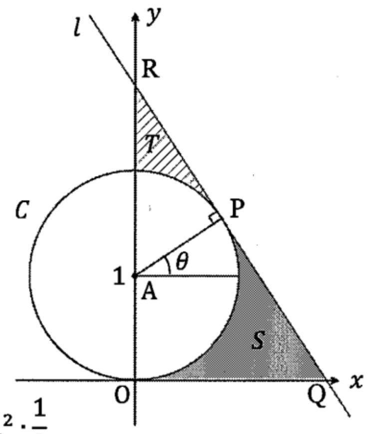
であることと,

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot 1 \times 2 - \pi \cdot 1^2 \cdot \frac{1}{3} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$$

を用いれば $S - T$ が出る．

［Ⅰ］(つづき)

【別解】



図のように各点 A, P, Q, R を定め，直線 AP と x 軸のなす角を $\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，

$$\mathrm{P}(\cos\theta, \sin\theta+1)$$

よって，直線 l の方程式は，

$$\cos\theta\cdot x+\sin\theta\,(y-1)=1$$
$$x\cos\theta+y\sin\theta=1+\sin\theta$$

$y=0, x=0$ とすると，

$$\mathrm{Q}\left(\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}, 0\right),\ \mathrm{R}\left(0, \frac{1+\sin\theta}{\sin\theta}\right)$$

したがって，

$$\begin{aligned} S+T&=\frac{1}{2}\cdot\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{1+\sin\theta}{\sin\theta}-\pi\cdot 1^2\cdot\frac{1}{2}\\ &=\frac{(1+\sin\theta)^2}{\sin 2\theta}-\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

ここで， $f(\theta)=\dfrac{(1+\sin\theta)^2}{\sin 2\theta}$ とおくと，

$$\begin{aligned} f'(\theta)&=\frac{2(1+\sin\theta)\cos\theta\sin 2\theta-(1+\sin\theta)^2\cdot 2\cos 2\theta}{\sin^2 2\theta}\\ &=\frac{2(1+\sin\theta)}{\sin^2 2\theta}\{2\sin\theta(1-\sin^2\theta)-(1+\sin\theta)(1-2\sin^2\theta)\}\\ &=\frac{2(1+\sin\theta)^2}{\sin^2 2\theta}(2\sin\theta-1)\end{aligned}$$

よって， $f(\theta)$ の増減表は以下のようになる．

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(\theta)$		$-$	0	$+$	
$f(\theta)$		↘		↗	

$f(\theta)$ が最小のとき，$S+T$ も最小となることから，$S+T$ が最小となるのは $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ のときで，このとき，

$$\mathrm{P}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right),\ \mathrm{Q}(\sqrt{3}, 0),\ \mathrm{R}(0, 3)$$

であり，

$$S=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot 1-\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\frac{2}{3}\pi=\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$$
$$T=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{3}-\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}$$

より，

$$S-T=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}$$ …（答）

[Ⅱ]

「自然数Nを3で割ったときの余り」は
「Nの各位の数の和を3で割ったときの余り」と等しい．

(1) 数1, 2, 4を重複を許して $n+1$ 個並べてできる $n+1$ 桁の自然数のうち，3の倍数となるものは
- 一の位が1のものは，残りの位の数の和を3で割ったときの余りが2より c_n 個
- 一の位が4のものは，残りの位の数の和を3で割ったときの余りが2より c_n 個
- 一の位が2のものは，残りの位の数の和を3で割ったときの余りが1より b_n 個

ある．よって

$$a_{n+1} = b_n + 2c_n \quad \cdots ①$$
…(答)

同様に

$$b_{n+1} = c_n + 2a_n \quad \cdots ②$$
…(答)

$$c_{n+1} = a_n + 2b_n \quad \cdots ③$$
…(答)

(2)
$$\begin{aligned} a_{n+2} &= b_{n+1} + 2c_{n+1} && (①より) \\ &= (c_n + 2a_n) + 2(a_n + 2b_n) && (②,③より) \\ &= 4(a_n + b_n + c_n) - 3c_n \end{aligned}$$

ここで，$a_n + b_n + c_n$ は
数1, 2, 4を重複を許して n 個並べてできる n 桁の自然数の個数
であるから，$a_n + b_n + c_n = 3^n$ である．よって

$$a_{n+2} = 4\cdot 3^n - 3c_n \quad \cdots ④$$
…(答)

(3) ④と同様に

$$b_{n+2} = 4\cdot 3^n - 3a_n \quad \cdots ⑤$$
$$c_{n+2} = 4\cdot 3^n - 3b_n \quad \cdots ⑥$$

［Ⅱ］（つづき1）

$$a_{n+6}=a_{(n+4)+2}=4\cdot 3^{n+4}-3c_{n+4} \qquad (④より)$$

$$=4\cdot 3^{n+4}-3(4\cdot 3^{n+2}-3b_{n+2}) \qquad (⑥より)$$

$$=4\cdot 3^{n+4}-4\cdot 3^{n+3}+9(4\cdot 3^{n}-3a_n) \qquad (⑤より)$$

$$=4\cdot 3^2\cdot 3^{n+2}-4\cdot 3\cdot 3^{n+2}+4\cdot 3^{n+2}-27a_n$$

$$=28\cdot 3^{n+2}-27a_n \quad \cdots ⑦ \qquad \cdots(答)$$

(4) $a_{6m+1}=d_m$ とおく $(m=0,1,2,\cdots)$

$d_0=a_1=$（1, 2, 4のうち, 3の倍数となるものの個数）$=0$、

⑦に $n=6m+1$ を代入すると

$$a_{6(m+1)+1}=28\cdot 3^{6m+3}-27a_{6m+1}$$

$$d_{m+1}=-27d_m+28\times 3^3\times(3^6)^m \quad \cdots ⑧$$

$$d_{m+1}-(3^6)^{m+1}=-27\{d_m-(3^6)^m\}$$

$$d_m-(3^6)^m=\{d_0-(3^6)^0\}\cdot(-27)^m$$

$$d_m=(3^6)^m-(-27)^m=3^{6m}-(-3)^{3m}$$

$$a_{6m+1}=3^{6m}-(-3)^{3m} \qquad \cdots(答)$$

[Ⅱ]（つづき2）

（注）⑧以降は次のように変形してもよい.

⑧の両辺を $(3^6)^{m+1}$ で割る

$$\frac{\alpha_{m+1}}{(3^6)^{m+1}} = -\frac{1}{27}\cdot\frac{\alpha_m}{(3^6)^m} + \frac{28}{27}$$

$$\frac{\alpha_{m+1}}{(3^6)^{m+1}} - 1 = -\frac{1}{27}\left\{\frac{\alpha_m}{(3^6)^m} - 1\right\}$$

$$\frac{\alpha_m}{(3^6)^m} - 1 = \left\{\frac{\alpha_0}{(3^6)^0} - 1\right\}\times\left(-\frac{1}{27}\right)^m$$

$$\frac{\alpha_0}{(3^6)^0} - 1 = \frac{a_1}{1} - 1 = 0 - 1 = -1$$ より

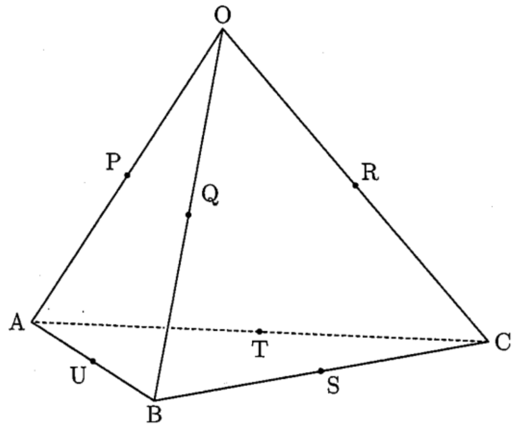
$$\frac{\alpha_m}{3^{6m}} = 1 - \left(-\frac{1}{27}\right)^m$$

$$\alpha_m = 3^{6m} - \left(\frac{3^6}{-27}\right)^m = 3^{6m} - (-3)^{3m}$$

$$a_{6m+1} = 3^{6m} - (-3)^{3m}$$

［Ⅲ］

(1)



$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおくと，

$$\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OS}}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\right)=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{4},$$

$$\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{OT}}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{\vec{c}+\vec{a}}{2}\right)=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{4},$$

$$\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{OR}}+\overrightarrow{\mathrm{OU}}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\vec{c}+\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right)=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{4}$$

であるから，辺 PS の中点，辺 QT の中点，辺 RU の中点はいずれも一致する (以下，この点を K とする)．さらに，辺 PS，辺 QT，辺 RU のなかに一致するものはないから，辺 PS，QT，RU は 1 点 K のみで交わる．

(証明終り)

(2) 以下，$\ell=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2$ とする．

$$\mathrm{OA}^2+\mathrm{BC}^2=|\vec{a}|^2+|\vec{c}-\vec{b}|^2=\ell-2\vec{b}\cdot\vec{c},$$

$$\mathrm{OB}^2+\mathrm{CA}^2=|\vec{b}|^2+|\vec{a}-\vec{c}|^2=\ell-2\vec{c}\cdot\vec{a},$$

$$\mathrm{OC}^2+\mathrm{AB}^2=|\vec{c}|^2+|\vec{b}-\vec{a}|^2=\ell-2\vec{a}\cdot\vec{b}$$

であり，このことと $\mathrm{OA}^2+\mathrm{BC}^2=\mathrm{OB}^2+\mathrm{CA}^2=\mathrm{OC}^2+\mathrm{AB}^2$ より，

$$\ell-2\vec{b}\cdot\vec{c}=\ell-2\vec{c}\cdot\vec{a}=\ell-2\vec{a}\cdot\vec{b}.$$

［Ⅲ］(つづき 1)

これより，

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}$$

が成り立つ．

以下，$m=\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}$ とする．

$$|\overrightarrow{\mathrm{PS}}|^2=\left|\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}-\frac{\vec{a}}{2}\right|^2=\frac{\ell-2m}{4},$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{QT}}|^2=\left|\frac{\vec{c}+\vec{a}}{2}-\frac{\vec{b}}{2}\right|^2=\frac{\ell-2m}{4},$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{RU}}|^2=\left|\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}-\frac{\vec{c}}{2}\right|^2=\frac{\ell-2m}{4}$$

であるから，

$$\mathrm{PS}=\mathrm{QT}=\mathrm{RU}$$

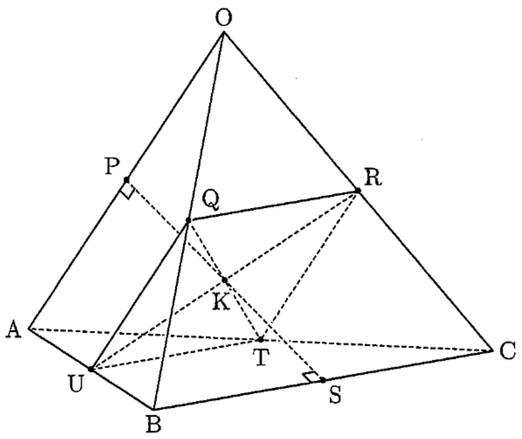
が成り立つ．

このことと (1) より，点 P，Q，R，S，T，U はいずれも点 K から等距離にある．

したがって，点 P，Q，R，S，T，U は同一球面上にある．

(証明終り)

(3)



中点連結定理により，OA // RT，BC // QR である．

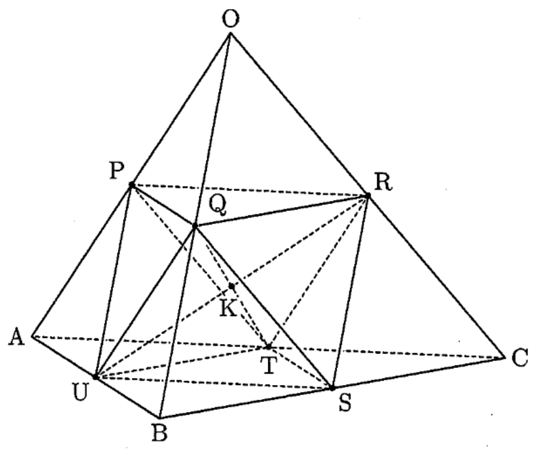
このことと辺 PS が辺 OA，BC と直交することから，PS ⊥ RT，PS ⊥ QR である．

したがって，四角形 QRTU を含む平面と直線 PS は垂直であり，このことと PS = 2PK より，V は四角錐 P−QRTU の体積の 2 倍である．

［Ⅲ］(つづき 2)

よって，四角形 QRTU の面積を S とすると，

$$V=\left(\frac{1}{3}S\cdot \mathrm{PK}\right)\cdot 2. \qquad \cdots ①$$



ここで，(1) より，線分 QT と線分 RU は点 K のみを共有し，(2) より，QT＝RU である．
したがって，四角形 QRTU は長方形である．

さらに，中点連結定理により，$\mathrm{RT}=\dfrac{a}{2}$，$\mathrm{QR}=\dfrac{k}{2}$ であるから，

$$S=\frac{a}{2}\cdot\frac{k}{2}=\frac{ak}{4}. \qquad \cdots ②$$

また，(2) より，PK＝QK であり，直角三角形 QRT において，

$$\mathrm{QK}=\frac{1}{2}\mathrm{QT}=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{k}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{a^2+k^2}}{4}$$

であるから，

$$\mathrm{PK}=\frac{\sqrt{a^2+k^2}}{4}. \qquad \cdots ③$$

②，③ を ① に代入すると，

$$V=\frac{ak\sqrt{a^2+k^2}}{24}. \qquad \cdots (答)$$

［Ⅲ］(つづき 3)

(4) $k=1$ のとき，次の (i)〜(iv) をすべて満たすように 4 点 O，A，B，C をとることにより，どのような正の数 a に対しても (3) の八面体を作ることができる．

(i) 直線 OA と直線 BC は同一平面上にない．

(ii) 直線 OA と直線 BC は垂直である．

(iii) 直線 PS は直線 OA と直線 BC のどちらにも垂直である．

(iv) $\mathrm{PS}=\dfrac{\sqrt{a^2+1}}{2}$.

したがって，a はすべての正の値をとり得る．

また，(3) の結果より，$k=1$ のとき，$V=\dfrac{a\sqrt{a^2+1}}{24}$ であるから，$\displaystyle\lim_{a\to\infty} V=\infty$.

以上より，

V の最大値は存在しない．　…(答)

[IV]

(1) 3 回試合を行い W が連敗しないのは，勝つチームが，

WWW，WWK，WKW，KWW，KWK

となる 5 つの場合なので，

$$p_3 = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{8}. \qquad \cdots \text{(答)}$$

(2) $n+2$ 回試合を行い W が連敗しないのは，次の 2 つに分けられる．

・1 試合目に W が勝ち，それ以降の $n+1$ 回は W は連敗しない，

・1 試合目に W が負け，2 試合目にWが勝ち，それ以降の n 回は W は連敗しない．

よって，

$$p_{n+2} = \frac{1}{2}p_{n+1} + \frac{1}{4}p_n. \qquad \cdots \text{(答)}$$

(3) $p_{n+2} - \beta p_{n+1} = \alpha(p_{n+1} - \beta p_n)$ と $p_{n+2} - \alpha p_{n+1} = \beta(p_{n+1} - \alpha p_n)$ を変形すると，どちらも，

$$p_{n+2} = (\alpha + \beta)p_{n+1} - \alpha\beta p_n$$

となるので，(2) の結果から，

$$\alpha + \beta = \frac{1}{2},\ \alpha\beta = -\frac{1}{4}$$

を満たせばよい．つまり，α と β は，

$$x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} = 0$$

の 2 解であるから，

$$\alpha = \frac{1-\sqrt{5}}{4}, \quad \beta = \frac{1+\sqrt{5}}{4}. \qquad \cdots \text{(答)}$$

(4) (3)の問題文より，$\{\, p_{n+1} - \beta p_n \,\}$ は公比 α の等比数列になるので，

$$p_{n+1} - \beta p_n = (p_3 - \beta p_2)\alpha^{n-2}.$$

同様に，$\{\, p_{n+1} - \alpha p_n \,\}$ は公比 β の等比数列になるので，

$$p_{n+1} - \alpha p_n = (p_3 - \alpha p_2)\beta^{n-2}.$$

辺々引いて，

$$(\beta - \alpha)p_n = (p_3 - \alpha p_2)\beta^{n-2} - (p_3 - \beta p_2)\alpha^{n-2}.$$

$p_2 = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$ （WW, WK, KW となる場合）なので，

$$p_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\frac{7+3\sqrt{5}}{8}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{n-2} - \frac{7-3\sqrt{5}}{8}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{n-2}\right\}. \qquad \cdots \text{(答)}$$

[IV]（つづき）

注記

＊(4) で，$p_1=1$ とみなして，$n=1$ から漸化式を用いて解いて，

$$(\beta-\alpha)p_n=(p_2-\alpha p_1)\beta^{n-1}-(p_2-\beta p_1)\alpha^{n-1},$$

$$p_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\frac{2+\sqrt{5}}{2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1}-\frac{2-\sqrt{5}}{2}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1}\right\}$$

と求めることもできる．

さらに，$p_0=p_1=1$ とみなして，$n=0$ から漸化式を用いて解いて，

$$(\beta-\alpha)p_n=(p_1-\alpha p_0)\beta^{n}-(p_1-\beta p_0)\alpha^{n},$$

$$p_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\frac{3+\sqrt{5}}{2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{n}-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{n}\right\}$$

ともできる．

いずれも，見かけは異なるが，同じ式である．

＊(3) の問題文には「以下の２式を満たす α，β を求めよ」と書かれているので，字義的に解釈すると，このようなすべての α と β を求めることになるが，この解答を読むと，そのような α と β のうち１つを求めただけのように読めるかもしれない．だが，α と β は一意的に決定するので，問題はない．

実際，　$p_2=\frac{3}{4}$，$p_3=\frac{5}{8}$ であり，

$$p_{n+2}=\frac{1}{2}p_{n+1}+\frac{1}{4}p_n \quad と \quad p_{n+2}=(\alpha+\beta)p_{n+1}-\alpha\beta p_n$$

が，すべての n（$\geqq 2$）で成り立つので，α と β は一意的に決定する．

［V］

(1)
$$y=-\cos t-\frac{1}{2}\cos 2t-\frac{1}{2}=-\cos t-\frac{1}{2}(2\cos^2 t-1)-\frac{1}{2}=-\left(\cos t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$$

である．

また，$0 \leqq t \leqq \pi$ より，$\cos t$ のとり得る値の範囲は $-1 \leqq \cos t \leqq 1$ である．

したがって，y の

最大値は $\frac{1}{4}$，最小値は -2．　　$\cdots$(答)

(2)
$$\frac{dy}{dt}=\sin t+\sin 2t=\sin t+2\sin t\cos t=\sin t(2\cos t+1)$$

であるから，$\frac{dy}{dt}<0$ となる t の範囲は，

$$\frac{2}{3}\pi<t<\pi.$$　　$\cdots$(答)

また，$x=\sin t+\frac{1}{2}\sin 2t$ より，

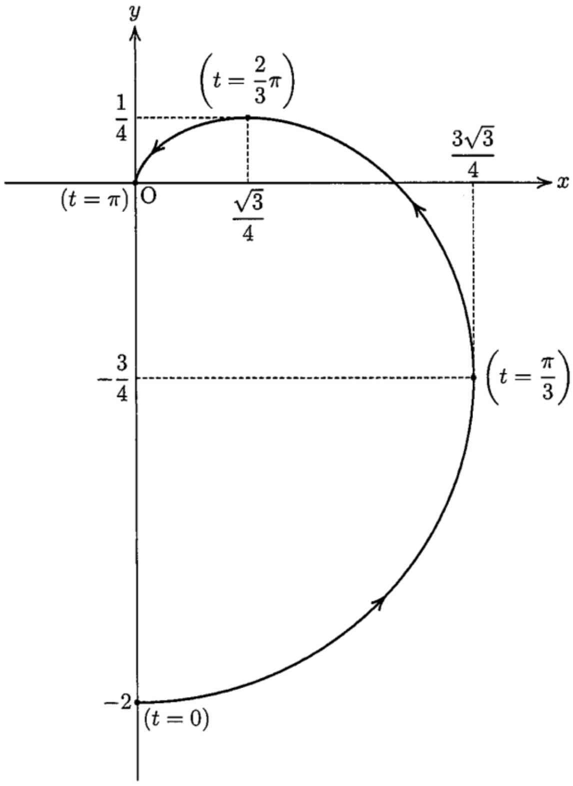
$$\frac{dx}{dt}=\cos t+\cos 2t=\cos t+(2\cos^2 t-1)=(\cos t+1)(2\cos t-1).$$

よって，t の値の変化に応じて，C 上の点 $(x,\ y)$ の位置は次の表のように変化する．

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{dt}$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$\frac{dy}{dt}$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	
$(x,\ y)$	$(0,\ -2)$	$\nearrow$	$\left(\frac{3\sqrt{3}}{4},\ -\frac{3}{4}\right)$	$\nwarrow$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{4},\ \frac{1}{4}\right)$	$\swarrow$	$(0,\ 0)$

［V］(つづき 1)

したがって，C の概形は次の図のようになる．



…(答)

［V］(つづき 2)

(3) C の $0 \leqq t \leqq \frac{2}{3}\pi$ の部分の点の x 座標を x_1，C の $\frac{2}{3}\pi \leqq t \leqq \pi$ の部分の点の x 座標を x_2 と表すと，

$$\begin{aligned}
V &= \int_{-2}^{\frac{1}{4}} \pi {x_1}^2 \, dy - \int_{0}^{\frac{1}{4}} \pi {x_2}^2 \, dy \\
&= \int_{0}^{\frac{2}{3}\pi} \pi {x_1}^2 \cdot \frac{dy}{dt} \, dt - \int_{\pi}^{\frac{2}{3}\pi} \pi {x_2}^2 \cdot \frac{dy}{dt} \, dt \\
&= \int_{0}^{\frac{2}{3}\pi} \pi \left(\sin t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)^2 \sin t(2\cos t + 1) \, dt - \int_{\pi}^{\frac{2}{3}\pi} \pi \left(\sin t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)^2 \sin t(2\cos t + 1) \, dt \\
&= \int_{0}^{\frac{2}{3}\pi} \pi \left(\sin t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)^2 \sin t(2\cos t + 1) \, dt + \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} \pi \left(\sin t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)^2 \sin t(2\cos t + 1) \, dt \\
&= \int_{0}^{\pi} \pi \left(\sin t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)^2 \sin t(2\cos t + 1) \, dt \\
&= \int_{0}^{\pi} \pi \left(\sin t + \frac{1}{2}\cdot 2\sin t\cos t\right)^2 \sin t(2\cos t + 1) \, dt \\
&= \int_{0}^{\pi} \pi \sin^2 t(1 + \cos t)^2 \sin t(2\cos t + 1) \, dt \\
&= \int_{0}^{\pi} \pi(1 - \cos^2 t)(1 + \cos t)^2(1 + 2\cos t)\sin t \, dt \\
&= \int_{1}^{-1} \pi(1 - u^2)(1 + u)^2(1 + 2u)\cdot(-1) \, du \qquad (u = \cos t \text{ とおいた}) \\
&= \int_{-1}^{1} \pi(1 - u^2)(1 + u)^2(1 + 2u) \, du \\
&= \int_{-1}^{1} \pi(-2u^5 - 5u^4 - 2u^3 + 4u^2 + 4u + 1) \, du \\
&= 2\int_{0}^{1} \pi(-5u^4 + 4u^2 + 1) \, du \\
&= 2\left[\pi\left(-u^5 + \frac{4}{3}u^3 + u\right)\right]_0^1 \\
&= \frac{8}{3}\pi.
\end{aligned}$$

$\cdots$(答)

【参考】　本問で登場した曲線 C はカージオイドと呼ばれる曲線である．