$\boxed{1}$

(1)　$\dfrac{2024n}{1-46n}+44=\dfrac{2024n+44(1-46n)}{1-46n}=\dfrac{44}{1-46n}<0$ より，与えられた不等式は

$$\begin{aligned}\left|\frac{2024n}{1-46n}+44\right| &< \frac{1}{2025}\\ \left|\frac{44}{1-46n}\right| &< \frac{1}{2025}\\ -\frac{1}{2025} &< \frac{44}{1-46n}\\ \frac{1}{2025} &> \frac{44}{46n-1}\\ 2025 &< \frac{46n-1}{44}\\ n &> \frac{44\cdot 2025+1}{46}\end{aligned}$$

と変形できる．$\dfrac{44\cdot 2025+1}{46}=1936.9\cdots$ であるから，この不等式を満たす正の整数 n の最小値は

$$n=\boxed{1937} \qquad \cdots \boxed{ア}\ (答)$$

である．

(2)　与えられた条件を

$$a_{i+1}^3<27a_i^4 \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1) \qquad \cdots ①$$

$$\sum_{i=1}^{n-1}\frac{a_i}{a_{i+1}}<1 \qquad \cdots ②$$

とすると，$n=2$ のとき，①より $a_2^3<27$，②より $\dfrac{1}{a_2}<1$ すなわち $a_2>1$ であるから，これらを満たす正の整数 a_2 は $a_2=2$ に限る．

よって，$n=3$ のとき，①より $a_3^3<432$，②より $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{a_3}<1$ すなわち $a_3>4$ であるから，($7^3<432<8^3$ に注意すると）これらを満たす正の整数 a_3 は $a_3=5,\ 6,\ 7$ のいずれかに限る．

(i) $a_3=5$ のとき．

$n=4$ のときに①，②が成り立つとすると，②より $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{5}+\dfrac{5}{a_4}<1$ であるから，$a_4>50$ となるが，このとき $a_4^3>125000$，$27a_3^4=16875$ であるから，$a_4^3<27a_3^4$ が成り立たない．つまり①は $n=4$ のときに成り立たないので $n=3$ であり，

$$a_1=1,\ a_2=2,\ a_3=5$$

となる．

(ii) $a_3=6$ のとき．

$n=4$ のときに①，②が成り立つとすると，②より $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{6}+\dfrac{6}{a_4}<1$ であるから，$a_4>36$ となるが，このとき $a_4^3>46656$，$27a_3^4=34992$ であるから，$a_4^3<27a_3^4$ が成り立たない．つまり①は $n=4$ のとき成り立たないので $n=3$ であり，

$$a_1=1,\ a_2=2,\ a_3=6$$

となる．

$\boxed{1}$ （つづき1）

(iii) $a_3=7$ のとき．

$n=4$ のときに①，②が成り立つとすると，②より $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{7}+\dfrac{7}{a_4}<1$ であるから，$a_4>32+\dfrac{2}{3}$ すなわち $a_4\geqq 33$ となる．また，①より $a_4^3<64827$ であるから，$40^3<64827<41^3$ であることに注意すると，$a_4\leqq 40$ となる．よって，a_4 のとりうる値の範囲は

$$33\leqq a_4\leqq 40$$

である．

これより，②が $n=5$ のときに成り立つためには，

$$1>\frac{1}{2}+\frac{2}{7}+\frac{7}{a_4}+\frac{a_4}{a_5}\geqq\frac{1}{2}+\frac{2}{7}+\frac{7}{40}+\frac{33}{a_5}$$

となる必要があるので，$1>\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{7}+\dfrac{7}{40}+\dfrac{33}{a_5}$ より $a_5>3\cdot 40\cdot 7$ となるが，

$$a_5^3>3^3\cdot 40^3\cdot 7^3=27\cdot 40^3\cdot 343$$
$$27a_4^4\leqq 27\cdot 40^4=27\cdot 40^3\cdot 40$$

であるから，$a_5^3<27a_4^4$ が成り立たない．

つまり，$n=5$ のときは①と②が同時に成り立たないので $n=4$ であり，

$$a_1=1,\ a_2=2,\ a_3=7,\ 33\leqq a_4\leqq 40$$

となる．

以上より，a_n のとりうる値で最大のものは，$n=4$ のときの

$$a_4=\boxed{40}\qquad\cdots\ \boxed{イ}\ (答)$$

である．

【注意】問題文の「a_n のとりうる値の最大値」とは，「2 以上の整数 n を変化させたときの，a_n のとりうる値の最大値」であると解釈して解答すると上記のようになる．

(3)　$\{a_n\}$ の各項は正であるから，

$$a_n^{n+1}a_{n+1}^n=C^{-(2n+1)}$$

において，底を C とする両辺の対数をとると，

$$\log_C\left(a_n^{n+1}a_{n+1}^n\right)=\log_C C^{-(2n+1)}$$
$$(n+1)\log_C a_n+n\log_C a_{n+1}=-(2n+1)$$

となり，さらに両辺を $n(n+1)$ で割って変形すると，

$$\frac{\log_C a_n}{n}+\frac{\log_C a_{n+1}}{n+1}=-\frac{2n+1}{n(n+1)}$$
$$\frac{\log_C a_n}{n}+\frac{\log_C a_{n+1}}{n+1}=-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$
$$\frac{\log_C a_{n+1}}{n+1}+\frac{1}{n+1}=-\left(\frac{\log_C a_n}{n}+\frac{1}{n}\right)$$

$\boxed{1}$ （つづき 2）

となる．これより，数列 $\left\{\dfrac{\log_C a_n}{n}+\dfrac{1}{n}\right\}$ は公比が -1 の等比数列であるから，$\log_C a_1=\log_C C=1$ より，

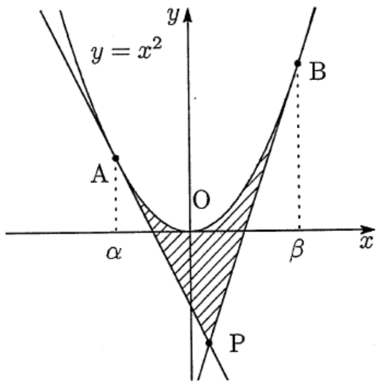
$$\frac{\log_C a_n}{n}+\frac{1}{n}=\left(\frac{\log_C a_1}{1}+\frac{1}{1}\right)\cdot(-1)^{n-1}$$
$$\frac{\log_C a_n}{n}+\frac{1}{n}=2(-1)^{n-1}$$
$$\log_C a_n=2n(-1)^{n-1}-1$$

よって，求める一般項は

$$a_n=\boxed{C^{2n(-1)^{n-1}-1}} \quad \cdots \boxed{\text{ウ}}\ (\text{答})$$

である．

(4)　$\mathrm{A}(\alpha,\alpha^2)$, $\mathrm{B}(\beta,\beta^2)$ とおく．$\alpha<\beta$ として一般性を失わない．



$y=x^2$ において $y'=2x$ であるから，接線 PA，PB の方程式は，それぞれ

$$y=2\alpha(x-\alpha)+\alpha^2=2\alpha x-\alpha^2,$$
$$y=2\beta(x-\beta)+\beta^2=2\beta x-\beta^2$$

と表せる．これら 2 直線の交点 $\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ \alpha\beta\right)$ が $\mathrm{P}(s,\ t)$ に一致するので，

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=s,\ \alpha\beta=t \quad \cdots①$$

が成り立つ．

また，線分 PA，PB と放物線 C で囲まれた図形の面積は

$$\begin{aligned}
&\int_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}}\{x^2-(2\alpha x-\alpha^2)\}\,dx+\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}\{x^2-(2\beta x-\beta^2)\}\,dx\\
=&\int_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}}(x-\alpha)^2\,dx+\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}(x-\beta)^2\,dx\\
=&\left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3\right]_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}}+\left[\frac{1}{3}(x-\beta)^3\right]_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}\\
=&\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^3
\end{aligned}$$

$\boxed{1}$ （つづき 3）

と表せるので，これが $\dfrac{144}{125}$ に等しい条件は

$$\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^3=\frac{144}{125}$$
$$(\beta-\alpha)^3=\left(\frac{12}{5}\right)^3$$
$$\beta-\alpha=\frac{12}{5}$$
$$(\beta-\alpha)^2=\left(\frac{12}{5}\right)^2$$
$$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=\frac{144}{25} \qquad \cdots②$$

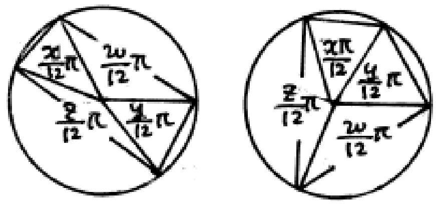
よって，①を変形した式 $\alpha+\beta=2s$，$\alpha\beta=t$ を②に代入・整理すると，求める方程式は

$$\boxed{s^2-t=\frac{36}{25}} \qquad \cdots \boxed{\text{エ}}\ (答)$$

である．

2

S_2, S_3 を考えるとき，四角形 R が円の中心 O を含む場合を考えればよい．



O と各頂点を結んだ線分のなす角を

$\frac{x}{12}\pi$, $\frac{y}{12}\pi$, $\frac{z}{12}\pi$, $\frac{w}{12}\pi$

とする．ただし x, y, z, w は整数で $1 \leqq x \leqq y \leqq z \leqq w \leqq 11$, $x+y+z+w=24$ を満たすものとする．これらの角をもつときの R の面積は，その形に関係なく

$$S(x, y, z, w)=\frac{1}{2}\left(\sin\frac{x}{12}\pi+\sin\frac{y}{12}\pi+\sin\frac{z}{12}\pi+\sin\frac{w}{12}\pi\right)$$

である． $\sin\frac{x}{12}\pi \leqq 1$, $\sin\frac{y}{12}\pi \leqq 1$, $\sin\frac{z}{12}\pi \leqq 1$, $\sin\frac{w}{12}\pi \leqq 1$ なので，

$S(x, y, z, w) \leqq 2$．等号が成り立つのは $x=y=z=w=6$ のときに限り，

$$S_1 = S(6, 6, 6, 6)$$

である．

(1) S_1 を与える四角形の頂点のひとつを動かすことにより，

$$S_2 = S(5, 6, 6, 7)=\frac{1}{2}\left(\sin\frac{5}{12}\pi+\sin\frac{6}{12}\pi+\sin\frac{6}{12}\pi+\sin\frac{7}{12}\pi\right)$$

ここで

$$\sin\frac{5}{12}\pi=\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},\quad \sin\frac{7}{12}\pi=\sin\left(\pi-\frac{5}{12}\pi\right)=\sin\frac{5}{12}\pi$$

なので

$$S_2=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+1+1+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}+4}{4} \quad \cdots(答)$$

(2) S_2 を与える四角形の頂点のひとつを動かすことで作られる四角形の面積

$$S(4, 6, 7, 7),\ S(4, 6, 6, 8),\ S(5, 5, 7, 7),\ S(5, 5, 6, 8)$$

について調べる．

$$S(5, 5, 7, 7)-S(5, 5, 6, 8)=\frac{1}{2}\left(\sin\frac{7}{12}\pi+\sin\frac{7}{12}\pi-\sin\frac{6}{12}\pi-\sin\frac{8}{12}\pi\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}-\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{2}>0$$

よって，

$$S(5, 5, 7, 7)>S(5, 5, 6, 8). \quad \cdots①$$

$$S(5, 5, 7, 7)-S(4, 6, 7, 7)=\frac{1}{2}\left(\sin\frac{5}{12}\pi+\sin\frac{5}{12}\pi-\sin\frac{4}{12}\pi-\sin\frac{6}{12}\pi\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}+2}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{2}>0$$

よって，

$$S(5, 5, 7, 7)>S(4, 6, 7, 7). \quad \cdots②$$

$\boxed{2}$（つづき1）

$$S(5,5,6,8)-S(4,6,6,8)=\frac{1}{2}\left(\sin\frac{5}{12}\pi+\sin\frac{5}{12}\pi-\sin\frac{4}{12}\pi-\sin\frac{6}{12}\pi\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}+2}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{2}>0$$

よって，

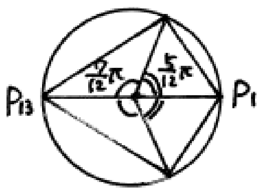
$$S(5,5,6,8)>S(4,6,6,8)\quad\cdots③$$

①，②，③より　$S_3=S(5,5,7,7)$ である．

異なる24枚のカードから4枚を取る取り出し方は ${}_{24}C_4$ 通りあり，これらは同様に確からしい．

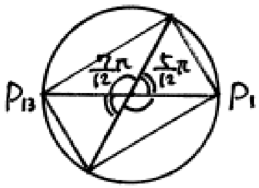
S_3 を与える四角形 R はその形状から次の2つの場合がある

(ア)



頂点 P_1 を P_{24} まで動かすことにより この形のものは 24通り

(イ)



頂点 P_1 を P_{12} まで動かすことにより この形のものは 12通り

したがって，求める確率は

$$\frac{24+12}{{}_{24}C_4}=\frac{36}{\frac{24\cdot23\cdot22\cdot21}{4\cdot3\cdot2\cdot1}}=\frac{6}{1771}\quad\cdots(答)$$

$\boxed{3}$

(1)　点 P は直線 AB 上にあるので，t を実数として

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{AB}} \\ &= (0,0,2) + t(-1,0,2) \\ &= (-t,0,2t+2)\end{aligned}$$

と表されるので

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{DP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OD}} \\ &= (-t,0,2t+1).\end{aligned}$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{DC}} = (1,1,-1)$ より

$$|\overrightarrow{\mathrm{DC}}|^2 = 1^2 + 1^2 + (-1)^2 = 3$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{DP}}|^2 = (-t)^2 + (2t+1)^2 = 5t^2 + 4t + 1$$

$$\overrightarrow{\mathrm{DC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{DP}} = -t - (2t+1) = -3t - 1$$

であるから

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{DCP} &= \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{DC}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{DP}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{DC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DP}})^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{3(5t^2+4t+1) - (-3t-1)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{6t^2+6t+2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{6(t+\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2}}\end{aligned}$$

よって，$\triangle$DCP の最小値は

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \qquad \cdots(\text{答})$$

$\boxed{3}$ （つづき 1）

(2)　Q が直線 CD 上にあるとき，実数 t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OC}}+t\overrightarrow{\mathrm{OD}}=(1-t,\ 1-t,\ t)$$

と表せ，このことと $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(0,\ 0,\ 2)$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(-1,\ 0,\ 4)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-1,\ 0,\ 2),\ \overrightarrow{\mathrm{AQ}}=(1-t,\ 1-t,\ t-2)$$

であるから，

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2&=(-1)^2+0^2+1^2=5,\\ \left|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\right|^2&=(1-t)^2+(1-t)^2+(t-2)^2=3t^2-8t+6,\\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}&=(-1)\cdot(1-t)+0\cdot(1-t)+2\cdot(t-2)=3t-5\end{aligned}$$

これより，三角形 QAB の面積は，

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{QAB}&=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\right|^2-\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\right)^2}\\ &=\frac{1}{2}\sqrt{5(3t^2-8t+6)-(3t-5)^2}\\ &=\frac{1}{2}\sqrt{6t^2-10t+5}\end{aligned}$$

同様に，R が直線 CD 上にあるとき，実数 s を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OC}}+s\overrightarrow{\mathrm{OD}}=(1-s,\ 1-s,\ s)$$

と表せるから，三角形 RAB の面積は，

$$\triangle\mathrm{RAB}=\frac{1}{2}\sqrt{6s^2-10s+5}$$

また，$\mathrm{QR}=\sqrt{(t-s)^2+(t-s)^2+(s-t)^2}=\sqrt{3}|s-t|$ であるから，$\mathrm{QR}=\sqrt{3}$ となる条件は $|s-t|=1$ と表せ，$s>t$ としても一般性を失わないので $s=t+1$ となる．以上より，三角形 QAB と RAB の面積の和 S は，

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\sqrt{6t^2-10t+5}+\frac{1}{2}\sqrt{6s^2-10s+5}\\ &=\frac{1}{2}\sqrt{6t^2-10t+5}+\frac{1}{2}\sqrt{6(t+1)^2-10(t+1)+5}\\ &=\frac{1}{2}\left(\sqrt{6t^2-10t+5}+\sqrt{6t^2+2t+1}\right)\\ &=\frac{1}{2}\left\{\sqrt{6\left(t-\frac{5}{6}\right)^2+\frac{5}{6}}+\sqrt{6\left(t+\frac{1}{6}\right)^2+\frac{5}{6}}\right\}\qquad\cdots①\end{aligned}$$

と表せる．

$\boxed{3}$ （つづき 2）

そこで，

$$\vec{a}=\left(\sqrt{6}\left(t-\frac{5}{6}\right),\ \sqrt{\frac{5}{6}}\right),\ \vec{b}=\left(-\sqrt{6}\left(t+\frac{1}{6}\right),\ \sqrt{\frac{5}{6}}\right)$$

とおくと，一般に $|\vec{a}|+|\vec{b}|\geqq|\vec{a}+\vec{b}|$ であり，

$$|\vec{a}|=\sqrt{6\left(t-\frac{5}{6}\right)^2+\frac{5}{6}},\ |\vec{b}|=\sqrt{6\left(t+\frac{1}{6}\right)^2+\frac{5}{6}},\ |\vec{a}+\vec{b}|=\frac{2\sqrt{21}}{3}$$

であるから，①は不等式

$$S\geqq\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{21}}{3}=\frac{\sqrt{21}}{3}$$

を満たす．等号が成立するのは，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行になるときであるから，

$$\sqrt{6}\left(t-\frac{5}{6}\right):\sqrt{\frac{5}{6}}=-\sqrt{6}\left(t+\frac{1}{6}\right):\sqrt{\frac{5}{6}}$$

$$\sqrt{6}\left(t-\frac{5}{6}\right)=-\sqrt{6}\left(t+\frac{1}{6}\right)$$

$$t=\frac{1}{3}$$

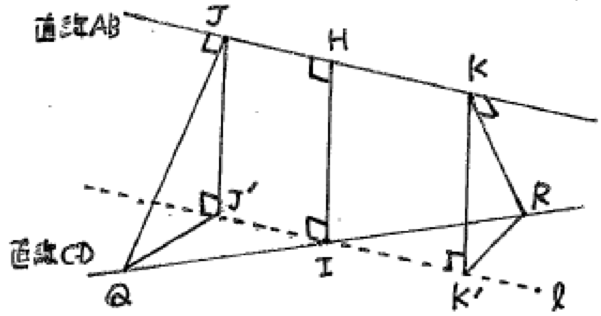
よって，$t=\frac{1}{3}$ のとき，S は最小値

$$S=\frac{\sqrt{21}}{3} \qquad \cdots(\text{答})$$

をとる．

3 (つづき3)

《参考》 Hは直線AB上の点，Iは直線CD上の点で $HI \perp AB$ かつ $HI \perp CD$ を満たすとする。



Q，Rから直線ABへ下ろした垂線の足をそれぞれJ，Kとする。

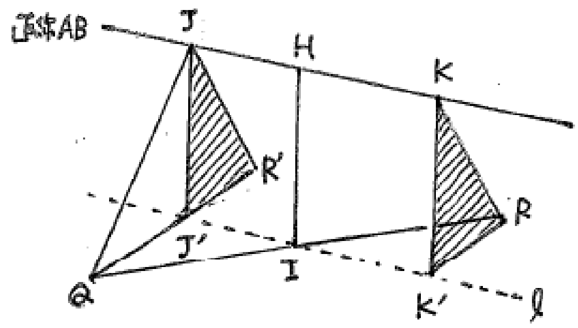
$\triangle QAB + \triangle RAB$

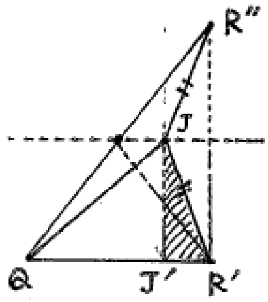
$= \frac{1}{2}AB \cdot QJ + \frac{1}{2}AB \cdot RK$

$= \frac{1}{2}AB(QJ + RK)$

そこで，QJ＋RKが最小となるときを考える。

lはIを通り直線ABに平行な直線で，Q，Rからlへ下ろした垂線の足をそれぞれJ′，K′とする。





明らかに平面QJJ′と平面RKK′はともにABに垂直なので，三角形RKK′を図のように平行移動してできる三角形R′JJ′を考える。

Jを通りQR′に平行な直線に関するR′の対称点をR″とすると，

$QJ + JR' = QJ + JR'' \geqq QR''$

等号が成り立つとき QJ＝JR′ で J′はQR′の中点となっている。よって

$\triangle QJ'I \equiv \triangle RK'I$ からIは線分QRの中点であり，このとき面積の和は最小となることがわかる。