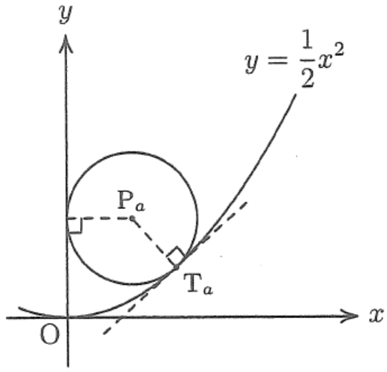
$\boxed{1}$

(1)　$\mathrm{T}_a\left(a, \dfrac{1}{2}a^2\right)$ とし，S_a の中心を P_a とする．



$$\left(\frac{1}{2}x^2\right)' = x$$

より，T_a での接線の傾きは a であるから，

ある正の実数 k を用いて，

$$\overrightarrow{\mathrm{T}_a\mathrm{P}_a} = k(-a,\ 1)$$

とおけ，このとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}_a} = \left(a,\ \frac{a^2}{2}\right) + k(-a,\ 1) = \left(a-ka,\ \frac{a^2}{2}+k\right).$$

ここで，（P_a の x 座標）$=\mathrm{T}_a\mathrm{P}_a$ であるから，

$$a - ka = \sqrt{a^2+1}\,k.$$

$$k = a\left(\sqrt{a^2+1}-a\right).\quad (このとき\ k>0)$$

よって，$\mathrm{P}_a(x(a), y(a))\ (a>0)$ とおくと，

$$x(a) = a - a^2\left(\sqrt{a^2+1}-a\right) = a^3 - a^2\sqrt{a^2+1} + a,$$

$$y(a) = \frac{a^2}{2} + a\left(\sqrt{a^2+1}-a\right) = a\sqrt{a^2+1} - \frac{a^2}{2}$$

より，$a=1$ として，

$$\mathrm{P}\left(2-\sqrt{2}, \sqrt{2}-\frac{1}{2}\right).$$　…（答）

$\boxed{1}$（つづき）

⑵
$$x'(a) = 3a^2 - 2a\sqrt{a^2+1} - a^2 \times \frac{2a}{2\sqrt{a^2+1}} + 1,$$
$$y'(a) = \sqrt{a^2+1} + a \times \frac{2a}{2\sqrt{a^2+1}} - a$$

より，

$$x'(1) = 4 - \frac{5}{2}\sqrt{2}, \quad y'(1) = \frac{3}{2}\sqrt{2} - 1.$$

であるから，求めるものは，

$$\frac{y'(1)}{x'(1)} = \frac{3\sqrt{2}-2}{8-5\sqrt{2}} = \sqrt{2}+1. \qquad \cdots(\text{答})$$

$\boxed{2}$

$$f'(t)=-f(t)g(t), \quad \cdots ① \qquad g'(t)=\{f(t)\}^2, \quad \cdots ② \qquad f(t)>0, \quad \cdots ③$$
$$|g(t)|<1, \quad \cdots ④ \qquad f(0)=1, \quad \cdots ⑤ \qquad g(0)=0. \quad \cdots ⑥$$

(1)　$p(t)=\{f(t)\}^2+\{g(t)\}^2$ より，

$$\begin{aligned} p'(t) &= 2f(t)f'(t)+2g(t)g'(t) \\ &= 2f(t)\{-f(t)g(t)\}+2g(t)\cdot\{f(t)\}^2 \quad (①,\ ②より) \\ &= 2\{f(t)\}^2\{-g(t)+g(t)\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

$\cdots$(答)

(2)　(1) の結果より，$p(t)$ は定数関数であり，⑤，⑥より，$p(0)=\{f(0)\}^2+\{g(0)\}^2=1^2+0^2=1$ であるから，

$$p(t)=1.$$

よって，

$$\{f(t)\}^2+\{g(t)\}^2=1. \qquad \cdots ⑦$$

④ より，$q(t)=\log\dfrac{1+g(t)}{1-g(t)}=\log\{1+g(t)\}-\log\{1-g(t)\}$ であるから，

$$\begin{aligned} q'(t) &= \frac{g'(t)}{1+g(t)}+\frac{g'(t)}{1-g(t)} \\ &= \frac{2\{f(t)\}^2}{1-\{g(t)\}^2}. \quad (②より) \\ &= \frac{2\{f(t)\}^2}{\{f(t)\}^2} \quad (⑦より) \\ &= 2. \end{aligned}$$

よって，$q'(t)$ は定数関数である.　(証明終り)

(3)　(2) の結果より，$q(t)=2t+C$ (C は定数) とおけ，⑥ を用いて $q(0)=\log\dfrac{1+g(0)}{1-g(0)}=0$ であるから，$C=0$.

よって，$q(t)=2t$ より，

$$\log\frac{1+g(t)}{1-g(t)}=2t.$$

$$\frac{1+g(t)}{1-g(t)}=e^{2t}.$$

$$1+g(t)=\{1-g(t)\}e^{2t}.$$

$$(e^{2t}+1)g(t)=e^{2t}-1.$$

$$g(t)=\frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}. \qquad \cdots ⑧$$

$\boxed{2}$ （つづき１）

したがって，

$$\lim_{t\to\infty} g(t) = \lim_{t\to\infty}\left\{1-\frac{2}{e^{2t}+1}\right\} = 1. \qquad \cdots(答)$$

(4)　$f(T)=g(T)$ のとき，⑦ から $\{f(T)\}^2=\{g(T)\}^2=\dfrac{1}{2}$ となるので，③より，$g(T)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. これより，

$$\frac{e^{2T}-1}{e^{2T}+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$e^{2T}=(1+\sqrt{2})^2.$$

$$e^{T}=1+\sqrt{2}\quad (e^T>0 \text{ より}).$$

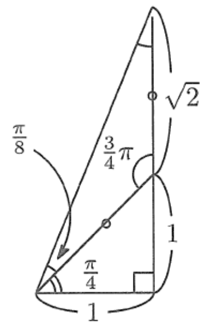
よって，求める曲線 $(x,\ y)=(f(t),\ g(t))$ $(0\leqq t\leqq T)$ の長さを L とすると，

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^T \sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}\,dt \\
&= \int_0^T \sqrt{\{-f(t)g(t)\}^2+\left\{(f(t))^2\right\}^2}\,dt. \quad (①，②より) \\
&= \int_0^T \sqrt{\{f(t)\}^2\left[\{f(t)\}^2+\{g(t)\}^2\right]}\,dt \\
&= \int_0^T \sqrt{1-\{g(t)\}^2}\,dt \quad (⑦より) \\
&= \int_0^T \sqrt{1-\left(\frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}\right)^2}\,dt \quad (⑧より) \\
&= \int_0^T \sqrt{\frac{4e^{2t}}{(e^{2t}+1)^2}}\,dt \\
&= \int_0^T \frac{2e^t}{e^{2t}+1}\,dt.
\end{aligned}$$

$u=e^t$ と置換すると $du=e^t dt$, $t:0\to T$ のとき $u:1\to e^T=1+\sqrt{2}$ より，

$$L=\int_1^{1+\sqrt{2}} \frac{2}{u^2+1}\,du.$$

$u=\tan\theta$ とおくと，$du=\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$ であり，$\tan\theta=1+\sqrt{2}$ を満たす θ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ は右図より $\theta=\dfrac{3}{8}\pi$ であるから，$u:1\to 1+\sqrt{2}$ のとき $\theta:\dfrac{\pi}{4}\to\dfrac{3}{8}\pi$ より，



$$\begin{aligned}
L &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{8}\pi} \frac{2}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{8}\pi} 2\,d\theta
\end{aligned}$$

$\boxed{2}$ （つづき２）

$$= \Big[\, 2\theta \,\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{8}\pi}$$
$$= \frac{3}{4}\pi - \frac{\pi}{2}$$
$$= \frac{\pi}{4}. \qquad \cdots(\text{答})$$

【(4) の参考】

⑦より，

$$\{f(t)\}^2 = 1 - \{g(t)\}^2$$
$$= 1 - \left(\frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}\right)^2 \quad (⑧\ より)$$
$$= \frac{4e^{2t}}{\left(e^{2t}+1\right)^2}.$$

③より，

$$f(t) = \frac{2e^t}{e^{2t}+1}. \qquad \cdots ⑨$$

$e^t = \tan\theta \left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，⑧，⑨より，

$$f(t) = \frac{2\tan\theta}{\tan^2\theta+1} = 2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta = \cos\left(2\theta - \frac{\pi}{2}\right),$$
$$g(t) = \frac{\tan^2\theta-1}{\tan^2\theta+1} = \sin^2\theta - \cos^2\theta = -\cos 2\theta = \sin\left(2\theta - \frac{\pi}{2}\right).$$

したがって，$\mathrm{P}(f(t),\ g(t))$ とすると，P は，単位円周上を動く．

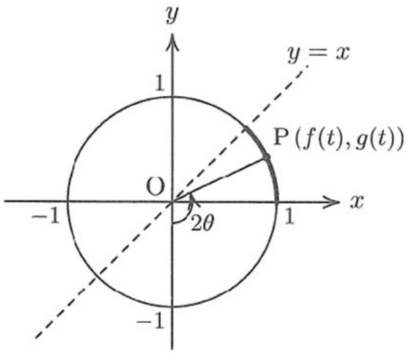
t が増加するとき θ も増加し，$t=0$ のとき ⑤, ⑥ より，P は，

$$(f(0),\ g(0)) = (1,\ 0).$$

また，単位円上の点で $f(T) - g(T)$ のとき，P は，

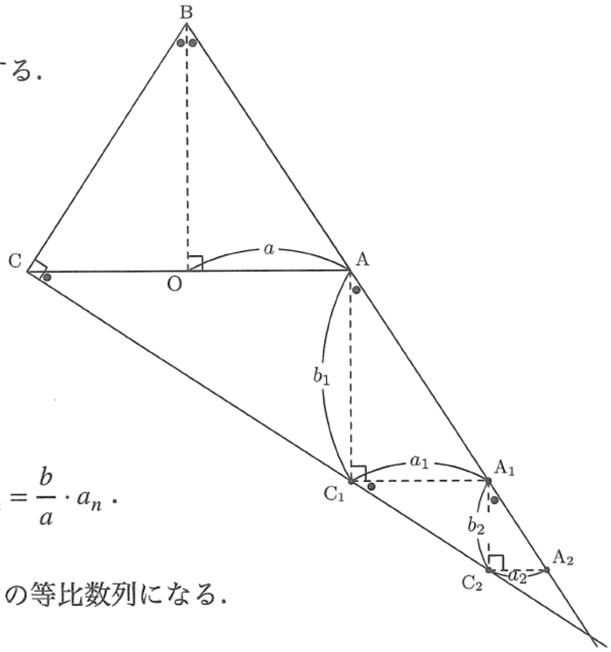
$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

よって，求める曲線 $(x,\ y) = (f(t),\ g(t))\ (0 \leqq t \leqq T)$ の長さは，図の太線部分の長さであるから，



$$\frac{\pi}{4}. \qquad \cdots(\text{答})$$

3



(1) 辺ACの中点は原点 O.　$A = A_0$, $C = C_0$ とする.

$$\triangle ABO \backsim \triangle A_nA_{n-1}C_n \backsim \triangle C_{n+1}C_nA_n$$

が成り立つので,

$$AO : BO = A_nC_n : A_{n-1}C_n$$
$$= C_{n+1}A_n : C_nA_n \quad (= a : b).$$

ここで,　$A_nC_n = a_n$, $A_{n-1}C_n = b_n$ とおくと,

$$a_n : b_n = b_{n+1} : a_n = a : b$$

が成り立つから,

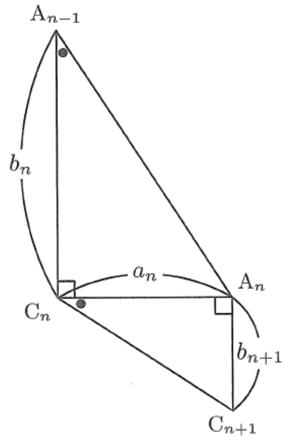
$$a_{n+1} = \frac{a}{b} \cdot b_{n+1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot a_n = \left(\frac{a}{b}\right)^2 a_n, \quad b_n = \frac{b}{a} \cdot a_n .$$

よって, 数列$\{a_n\}$, $\{b_n\}$は, どちらも公比 $\left(\frac{a}{b}\right)^2$ の等比数列になる.

この漸化式は, $a_0 = 2a$, $b_0 = 2b$ とすれば, $n \geqq 0$ で成り立つので,

$$a_n = 2a\left(\frac{a}{b}\right)^{2n}, \quad b_n = 2b\left(\frac{a}{b}\right)^{2n}.$$

以上により, A_n の x 座標 X_n は,



$$X_n = a + a_1 + a_2 + \dots + a_n = a + 2a\left(\frac{a}{b}\right)^2 \frac{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{2n}}{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2}$$

$$= a + \frac{2a^3}{b^2 - a^2} \cdot \left\{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{2n}\right\}$$

$$= \frac{a(a^2 + b^2)}{b^2 - a^2} - \frac{2a^3}{b^2 - a^2} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{2n}.$$

A_n の y 座標 Y_n は,

$$Y_n = -b_1 - b_2 - \dots - b_n = -(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \cdot \frac{b}{a}$$

$$= -\frac{2a^2b}{b^2 - a^2} \cdot \left\{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{2n}\right\} = -\frac{2a^2b}{b^2 - a^2} + \frac{2a^2b}{b^2 - a^2}\left(\frac{a}{b}\right)^{2n}.$$

$$A_n\left(\frac{a(a^2 + b^2)}{b^2 - a^2} - \frac{2a^3}{b^2 - a^2} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{2n}, \ -\frac{2a^2b}{b^2 - a^2} + \frac{2a^2b}{b^2 - a^2}\left(\frac{a}{b}\right)^{2n}\right). \qquad \cdots (答)$$

$\boxed{3}$ （つづき１）

C_n の x 座標は A_{n-1} の x 座標 X_{n-1} と等しく，y 座標は A_n の y 座標 Y_n と等しいので，

$$\mathrm{C}_n\left(\frac{a(a^2+b^2)}{b^2-a^2}-\frac{2a^3}{b^2-a^2}\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^{2(n-1)},\ -\frac{2a^2b}{b^2-a^2}+\frac{2a^2b}{b^2-a^2}\left(\frac{a}{b}\right)^{2n}\right).\qquad\cdots\text{（答）}$$

(2)　$S_n=\triangle\mathrm{ABC}\cdot\dfrac{\mathrm{BA}_n}{\mathrm{BA}}=ab\cdot\dfrac{X_n}{a}=b\cdot X_n$　（$\mathrm{BA}_n:\mathrm{BA}=$（$\mathrm{A}_n$の x 座標）:（Aの x 座標）なので）

$$=\frac{ab(a^2+b^2)}{b^2-a^2}-\frac{2a^3b}{b^2-a^2}\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^{2n}.\qquad\cdots\text{（答）}$$

(3)　$$\frac{\mathrm{BA}_n}{\mathrm{BC}}=\frac{\mathrm{BA}_n}{\mathrm{BA}}=\frac{X_n}{a}=\frac{a^2+b^2}{b^2-a^2}-\frac{2a^2}{b^2-a^2}\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^{2n}.$$

$0<\dfrac{a}{b}<1$ なので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{b}\right)^{2n}=0$．

したがって，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{BA}_n}{\mathrm{BC}}=\frac{a^2+b^2}{b^2-a^2}.\qquad\cdots\text{（答）}$$

3 （つづき 2）【(1)の別解】

(1)　ℓ, k の方程式は，それぞれ，

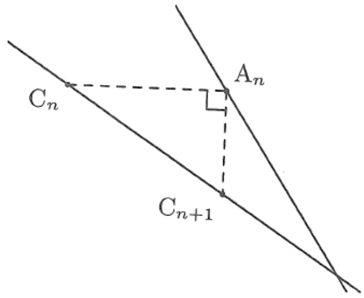
$$y=-\frac{b}{a}x+b, \qquad y=-\frac{a}{b}x-\frac{a^2}{b}.$$

C を $\mathrm{C_0}$，A を $\mathrm{A_0}$ とし，C_n の x 座標を $x_n\ (n=0,1,2,\cdots)$ とおく．

直線 $\mathrm{C}_n\mathrm{A}_n$，$\mathrm{A}_n\mathrm{C}_{n+1}$ の方程式は，それぞれ，

$$y=-\frac{a}{b}x_n-\frac{a^2}{b},\ x=x_{n+1}$$

であり，これらの交点 A_n は ℓ 上にあるので，



$$-\frac{a}{b}x_n-\frac{a^2}{b}=-\frac{b}{a}x_{n+1}+b.$$

$$x_{n+1}=\frac{a^2}{b^2}x_n+\frac{a^3+ab^2}{b^2}.$$

$$x_{n+1}-\frac{a^3+ab^2}{b^2-a^2}=\frac{a^2}{b^2}\left(x_n-\frac{a^3+ab^2}{b^2-a^2}\right).$$

よって，$\left\{x_n-\dfrac{a^3+ab^2}{b^2-a^2}\right\}$ は等比数列であり，

$$x_n-\frac{a^3+ab^2}{b^2-a^2}=\left(x_0-\frac{a^3+ab^2}{b^2-a^2}\right)\left(\frac{a^2}{b^2}\right)^n.$$

$$x_n=\frac{a^3+ab^2}{b^2-a^2}-\frac{2ab^2}{b^2-a^2}\left(\frac{a^2}{b^2}\right)^n.$$

これより，

$$\mathrm{C}_n\left(\frac{a^3+ab^2}{b^2-a^2}-\frac{2ab^2}{b^2-a^2}\left(\frac{a^2}{b^2}\right)^n,-\frac{2a^2b}{b^2-a^2}+\frac{2a^2b}{b^2-a^2}\left(\frac{a^2}{b^2}\right)^n\right),$$

$$\mathrm{A}_n\left(\frac{a^3+ab^2}{b^2-a^2}-\frac{2ab^2}{b^2-a^2}\left(\frac{a^2}{b^2}\right)^{n+1},-\frac{2a^2b}{b^2-a^2}+\frac{2b^3}{b^2-a^2}\left(\frac{a^2}{b^2}\right)^{n+1}\right). \quad \cdots(\text{答})$$

4

(1)　$C_1, \cdots, C_n, C_{n+1}$ の $n+1$ 枚の硬貨を投げたとき成功するのは, 次の 2 つの場合である.

- $C_1, \cdots, C_n$ のうちの表の枚数が偶数で C_{n+1} が表である.
- $C_1, \cdots, C_n$ のうちの表の枚数が奇数で C_{n+1} が裏である.

よって, 漸化式

$$X_{n+1} = (1 - X_n)p_{n+1} + X_n(1 - p_{n+1}) = (1 - 2p_{n+1})X_n + p_{n+1} \qquad \cdots ①$$

を得る．これを変形して,

$$X_{n+1} - \frac{1}{2} = (1 - 2p_{n+1})\left(X_n - \frac{1}{2}\right).$$

この式を順に用いると,

$$\begin{aligned} X_2 - \frac{1}{2} &= (1 - 2p_2)\left(X_1 - \frac{1}{2}\right), \\ X_3 - \frac{1}{2} &= (1 - 2p_3)\left(X_2 - \frac{1}{2}\right), \\ &\vdots \\ X_n - \frac{1}{2} &= (1 - 2p_n)\left(X_{n-1} - \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

上の式を下の式に次々に代入していって,

$$X_n - \frac{1}{2} = (1 - 2p_2)(1 - 2p_3) \times \cdots \times (1 - 2p_n)\left(X_1 - \frac{1}{2}\right).$$

$n = 1$ の場合は表が出れば成功なので,

$$X_1 = p_1. \qquad \cdots ②$$

よって,

$$\begin{aligned} X_n &= \frac{1}{2} + (1 - 2p_2)(1 - 2p_3) \times \cdots \times (1 - 2p_n)\left(p_1 - \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\{1 - (1 - 2p_1)(1 - 2p_2)(1 - 2p_3) \times \cdots \times (1 - 2p_n)\}. \qquad \cdots ③ \end{aligned}$$

(1) では, $1 - 2p_1$ から $1 - 2p_n$ まで全て $\frac{1}{3}$ であるから

$$X_n = \frac{1}{2}\left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}. \qquad \cdots (答)$$

(2)　Y_n は X_n と同じ漸化式 ① と初期条件 ② を満たすので, ③ が成り立つ.

(2) では,

$$1 - 2p_1 = \frac{1}{2},\ 1 - 2p_2 = \frac{2}{3},\ 1 - 2p_3 = \frac{3}{4},\ \cdots,\ 1 - 2p_n = \frac{n}{n+1}$$

であるから,

$$Y_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \times \cdots \times \frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{n}{2(n+1)}. \qquad \cdots (答)$$

(3)　(2) と同様にして,

$$Z_{3m} = \frac{1}{2}\{1 - (1 - 2p_1)(1 - 2p_2)(1 - 2p_3) \times \cdots \times (1 - 2p_{3m})\}$$

$\boxed{4}$ (つづき)

(3) では，

$1-2p_1 \sim 1-2p_m$ が $1-\dfrac{2}{3m}$，　$1-2p_{m+1} \sim 1-2p_{2m}$ が $1-\dfrac{4}{3m}$，　$1-2p_{2m+1} \sim 1-2p_{3m}$ が $1-\dfrac{2}{m}$

であるから，

$$Z_{3m} = \frac{1}{2}\left\{1-\left(1-\frac{2}{3m}\right)^m\left(1-\frac{4}{3m}\right)^m\left(1-\frac{2}{m}\right)^m\right\}$$

となる．一般に

$$\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{a}{t}\right)^t = \lim_{t\to\infty}\left\{\left(1+\frac{a}{t}\right)^{\frac{t}{a}}\right\}^a = e^a$$

であることを用いると，

$$\lim_{m\to\infty} Z_{3m} = \frac{1}{2}\left(1-e^{-\frac{2}{3}}e^{-\frac{4}{3}}e^{-2}\right) = \frac{1}{2}(1-e^{-4}). \qquad \cdots \text{(答)}$$

【(3) の別解】

$3m$ 枚の硬貨 $C_1, C_2, \cdots, C_{3m}$ を m 枚ずつの 3 グループ $C_1 \sim C_m$，$C_{m+1} \sim C_{2m}$，$C_{2m+1} \sim C_{3m}$ に分ける．各グループが成功する確率をそれぞれ α_m, β_m, γ_m とおく．硬貨が $3m$ 枚の場合に成功するのは，1 個または 3 個のグループが成功する場合であるから，

$$Z_{3m} = \alpha_m(1-\beta_m)(1-\gamma_m) + (1-\alpha_m)\beta_m(1-\gamma_m) + (1-\alpha_m)(1-\beta_m)\gamma_m + \alpha_m\beta_m\gamma_m$$

(1) と同様にして，

$$\alpha_m = \frac{1}{2}\left\{1-\left(1-\frac{2}{3m}\right)^m\right\},\ \beta_m = \frac{1}{2}\left\{1-\left(1-\frac{4}{3m}\right)^m\right\},\ \gamma_m = \frac{1}{2}\left\{1-\left(1-\frac{2}{m}\right)^m\right\}$$

を得る．これらを代入してもよい (以下略).

【参考】

$$f(x) = \{p_1x+(1-p_1)\}\{p_2x+(1-p_2)\}\times\cdots\times\{p_nx+(1-p_n)\}$$

とおき，k 枚の硬貨が表となる確率を q_k とおく．$f(x)$ を展開すると，

$$f(x) = q_0 + q_1x + q_2x^2 + q_3x^3 + \cdots + q_nx^n$$

となることがわかる．

$$f(-x) = q_0 - q_1x + q_2x^2 - q_3x^3 + \cdots + (-1)^nq_nx^n$$

であるから，

$$\frac{1}{2}\{f(x)-f(-x)\} = q_1x + q_3x^3 + q_5x^5 + \cdots$$

となる．$x=1$ を代入すると，求める確率

$$q_1 + q_3 + q_5 + \cdots$$

が次式で与えられることがわかる．

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\{f(1)-f(-1)\} &= \frac{1}{2}\{1\cdot 1\times\cdots\times 1-(1-2p_1)(1-2p_2)\times\cdots\times(1-2p_n)\}\\ &= \frac{1}{2}\{1-(1-2p_1)(1-2p_2)\times\cdots\times(1-2p_n)\}\end{aligned}$$

$\boxed{5}$

$f(x)=0$ の 2 解を α, β とする．$f(x)=0$ は実数係数の 2 次方程式であるから，

(i) α, β はともに実数　　　(ii) α, β は共役な虚数

のいずれかである．$\alpha^n=\beta^n=1$ となる正の整数 n が存在するから $|\alpha|^n=|\beta|^n=1$ となり，

$$|\alpha|=|\beta|=1 \qquad \cdots ①$$

である．また，解と係数の関係より，

$$\alpha+\beta=-a, \quad \alpha\beta=b \qquad \cdots ②$$

である．

(i)の場合

①より，

$$(\alpha,\beta)=(1,1),(1,-1),(-1,1),(-1,-1)$$

のいずれかである．いずれの場合でも，$\alpha^n=1,\ \beta^n=1$ を満たす正の整数 n として $n=2$ が存在する．したがって，②から，

$$(a,b)=(-2,1),(0,-1),(2,1)$$

である．

(ii)の場合

$\beta=\overline{\alpha}$ であるから，②より，

$$\alpha+\overline{\alpha}=-a, \quad \alpha\overline{\alpha}=b$$

すなわち，

$$a=-2\mathrm{Re}(\alpha), \quad b=|\alpha|^2 \quad (\text{ただし，}\mathrm{Re}(\alpha)\text{ は }\alpha\text{ の実部})$$

である．まず，①より $b=1$ である．また，①かつ α が虚数より $-1<\mathrm{Re}(\alpha)<1$ であるから $-2<a<2$ となり，a が整数であることより $a=-1,0,1$ のいずれかである．

- $(a,b)=(-1,1)$ のとき．$f(x)=0$ の 2 解は，以下，複号同順で，

$$x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}=\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)$$

となる．

$$\left\{\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)\right\}^6=\cos(\pm2\pi)+i\sin(\pm2\pi)=1$$

であるから，$\alpha^n=1,\ \beta^n=1$ を満たす正の整数 n として $n=6$ が存在する．

- $(a,b)=(1,1)$ のとき．$f(x)=0$ の 2 解は，以下，複号同順で，

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}=\cos\left(\pm\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\frac{2\pi}{3}\right)$$

となる．

$$\left\{\cos\left(\pm\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\frac{2\pi}{3}\right)\right\}^3=\cos(\pm2\pi)+i\sin(\pm2\pi)=1$$

であるから，$\alpha^n=1,\ \beta^n=1$ を満たす正の整数 n として $n=3$ が存在する．

$\boxed{5}$(つづき)

- $(a,b)=(0,1)$ のとき．$f(x)=0$ の 2 解は $x=\pm i$ となる．$(\pm i)^4=1$ であるから，$\alpha^n=1$, $\beta^n=1$ を満たす正の整数 n として $n=4$ が存在する．

以上より，

$$(a,b)=(-2,1),(0,-1),(2,1),(-1,1),(1,1),(0,1) \quad \cdots(答)$$

である．