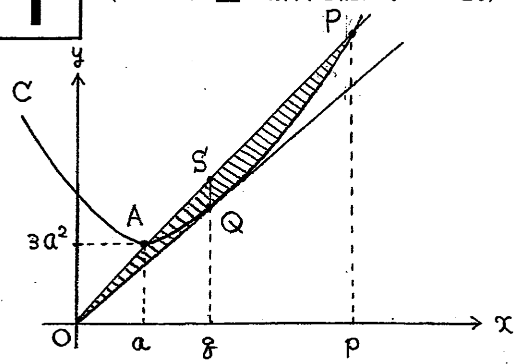
1

（ここには 1 の解答を記入すること。）



(1)　$f(x) = (x-a)^2 + 3a^2$ より，

$A(a, 3a^2)$ であるから，直線 OA

の方程式は $y = 3ax$ である．

$C : y = f(x)$ と連立して，

$(x-a)(x-4a) = 0$．

$p \neq a$ だから，$p = 4a$．…[答]

$Q(q,\ q^2 - 2aq + 4a^2)$ における

C の接線の方程式は，

$y = (2q - 2a)(x - q)$

$\qquad + q^2 - 2aq + 4a^2$

すなわち $y = 2(q-a)x - q^2 + 4a^2$．

O を通るとき，$q^2 = 4a^2$．

$q > 0$ だから，$q = 2a$．…[答]

$a > 0$ だから，$p > q$ である．

（証明おわり）

(2)　直線 OA と直線 $x = 2a$ の交点

を $S(2a, 6a^2)$ とする．

$Q(2a, 4a^2)$ より，三角形 OQS

の面積は，

$\frac{1}{2} \cdot 2a^2 \cdot 2a = 2a^3$．…①

また，線分 SP，線分 SQ および C

で囲まれた図形の面積は，

$$\int_{2a}^{4a} (3ax - x^2 + 2ax - 4a^2)\,dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}ax^2 - 4a^2x \right]_{2a}^{4a}$$

$$= \frac{10}{3}a^3.\quad \cdots ②$$

①，② より，

$$S = 2a^3 + \frac{10}{3}a^3 = \frac{16}{3}a^3.$$

…[答]

(3)　$S = \frac{2}{3}$ となるときの a の値

は，$a = \frac{1}{2}$．…[答]

2

（ここには 2 の解答を記入すること。）

(1)

$$\tan 75^\circ = \tan(45^\circ + 30^\circ) = \frac{\tan 45^\circ + \tan 30^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 30^\circ}$$

$$= \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$= \underline{2 + \sqrt{3}} \quad \cdots [答]$$

(2)

$a = d \tan 75^\circ = (2 + \sqrt{3})d$

$b \tan 75^\circ = d$ より，

$b = \dfrac{d}{\tan 75^\circ} = (2 - \sqrt{3})d$

よって，　$b < a$ であり，

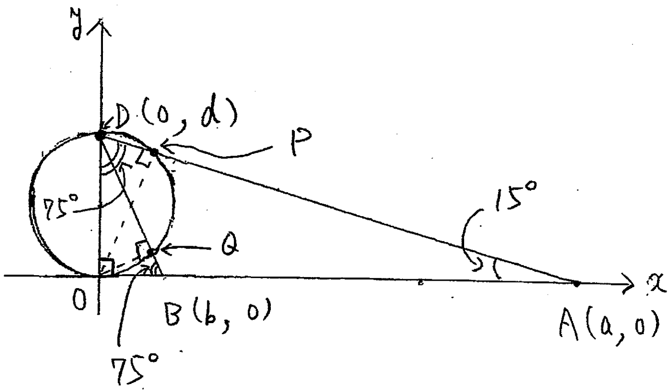
$AB = 6$ より，

$(2 + \sqrt{3})d - (2 - \sqrt{3})d = 6$

$\therefore\ d = \sqrt{3}$

以上より，

$a = \underline{2\sqrt{3} + 3}$，　$b = \underline{2\sqrt{3} - 3}$，　$d = \underline{\sqrt{3}}$　$\cdots$ [答]



(3) $\angle AOD = \angle APO\ (= 90^\circ)$ と $\angle OAD = \angle PAO$ (共通) より

$\triangle OAD \backsim \triangle PAO$ であるから，

$AO : AP = AD : AO$

$\therefore\ AP \cdot AD = AO^2$

A を B に，P を Q におきかえて同様の議論をすることにより，

$BQ \cdot BD = BO^2$

（証明おわり）

(4) $AD = \sqrt{a^2 + d^2} = \sqrt{6(4 + 2\sqrt{3})} = \sqrt{6(\sqrt{3}+1)^2} = \sqrt{6}(\sqrt{3} + 1)$

同様に，$BD = \sqrt{b^2 + d^2} = \sqrt{6}(\sqrt{3} - 1)$

(3) を用いると，

$$AP \cdot BQ = \frac{AO^2}{AD} \cdot \frac{BO^2}{BD} = \frac{(2\sqrt{3}+3)^2}{\sqrt{6}(\sqrt{3}+1)} \cdot \frac{(2\sqrt{3}-3)^2}{\sqrt{6}(\sqrt{3}-1)}$$

$$= \frac{(12 - 9)^2}{6(3 - 1)}$$

$$= \underline{\frac{3}{4}} \quad \cdots [答]$$

3　（ここには $\boxed{3}$ の解答を記入すること。）

(1)　$x+1 \geqq 2\log_t x + 1$　（(b) より）

$\therefore\ x+1 \geqq 2\log_t(\sqrt{t}\,x)$　…①

また,

$\sqrt{t}\,x - (x+1) = (\sqrt{t}-1)x - 1 = (\sqrt{t}-1)\left(x - \dfrac{1}{\sqrt{t}-1}\right) > 0$

（$t>1$ と (a) より）

より, $\sqrt{t}\,x > x+1\ (>0)$。これと $t>1$ より,

$2\log_t(\sqrt{t}\,x) > 2\log_t(x+1)$　…②

①, ② より,

$x+1 > 2\log_t(x+1)$

（証明おわり）

(2)　$n=1$ のとき $2\log_2 n = 0$, $n=2$ のとき $2\log_2 2 = 2$,

$n=3$ のとき $2\log_2 3 = \log_2 9 > \log_2 8 = 3\ (=n)$,

$n=4$ のとき $2\log_2 4 = 4$ であるから, $n=1$ は $n \leqq 2\log_2 n$ を満たさず, $n=2,\ 3,\ 4$ は $n \leqq 2\log_2 n$ を満たす。

また, (1) で $t=2$ とすると, (a) は $x > \dfrac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$, (b) は $x \geqq 2\log_2 x$ となり, $x=4$ はこの (a) と (b) をともに満たす。さらに, (1) で示した不等式は $x+1 > 2\log_2(x+1)$ となるから, 帰納的に,

$n=5,\ 6,\ 7,\ \cdots$ である n はすべて $n > 2\log_2 n$ を満たす（すなわち, $n \leqq 2\log_2 n$ を満たさない）

ことがわかる。

以上より, 求める n は,

$\underline{2,\ 3,\ 4}$　…[答]

4

(ここには 4 の解答を記入すること。)

(1) $a_{n+1}+b_{n+1}\sqrt{2}=(1+\sqrt{2})^{n+1}=(1+\sqrt{2})(a_n+b_n\sqrt{2})=a_n+2b_n+(a_n+b_n)\sqrt{2}$

a_{n+1}, b_{n+1}, a_n, b_n は整数なので $\begin{cases} a_{n+1}=a_n+2b_n & \text{——①} \\ b_{n+1}=a_n+b_n & \text{——②} \end{cases}$ ----- [答]

①②と $a_1=b_1=1$ を用いて

$(a_2, b_2)=(3, 2)$, $(a_3, b_3)=(7, 5)$, $(a_4, b_4)=(17, 12)$

$(a_5, b_5)=(41, 29)$, $(a_6, b_6)=(99, 70)$ $\therefore b_4=12$, $b_5=29$, $b_6=70$ … [答]

(2) $n=1$ のとき $(1-\sqrt{2})^1=1-\sqrt{2}$ より成立

$n=k$ のとき $(1-\sqrt{2})^k=a_k-b_k\sqrt{2}$ とする。このとき

$(1-\sqrt{2})^{k+1}=(1-\sqrt{2})^k(1-\sqrt{2})=(a_k-b_k\sqrt{2})(1-\sqrt{2})$

$=a_k+2b_k-(a_k+b_k)\sqrt{2}=a_{k+1}-b_{k+1}\sqrt{2}$ より

($\because$ ①②)

$n=k+1$ のときも成立するので $(1-\sqrt{2})^n=a_n-b_n\sqrt{2}$ である ---- [証明終わり]

(3) $a_n+b_n\sqrt{2}=(1+\sqrt{2})^n$

$a_n-b_n\sqrt{2}=(1-\sqrt{2})^n$ $\alpha=1+\sqrt{2}$, $\beta=1-\sqrt{2}$ として辺々引くと

$2\sqrt{2}b_n=\alpha^n-\beta^n$ より $b_n=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}(\alpha^n-\beta^n)$

よって $b_{n+1}b_{n-1}-b_n^2=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{2}}(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1})-\left\{\dfrac{1}{2\sqrt{2}}(\alpha^n-\beta^n)\right\}^2$

$=\dfrac{1}{8}(-\alpha^{n+1}\beta^{n-1}-\alpha^{n-1}\beta^{n+1}+2\alpha^n\beta^n)$

$=\dfrac{1}{8}\left\{-(-1)^{n-1}\alpha^2-(-1)^{n-1}\beta^2+2(-1)^n\right\}$ ($\because \alpha\beta=-1$)

$=\dfrac{1}{8}(-1)^n(\alpha^2+\beta^2+2)=(-1)^n$ ----- [答]

(4) $70p-29q=1$

(3) より $b_6b_4-b_5^2=70\cdot12-29\cdot29=-1$ なので

$70(-12)-29(-29)=1$ となるので $70\times29-29\times70=0$

を加えて $70\cdot17-29\cdot41=1$

$\therefore (p, q)=(17, 41)$ --- [答]