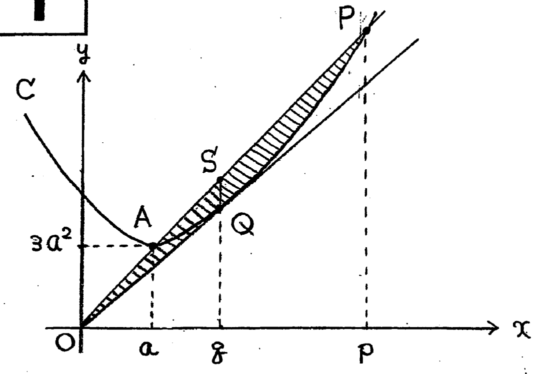
1 (ここには1の解答を記入すること。)



(1)　$f(x)=(x-a)^2+3a^2$ より，

$A(a,\ 3a^2)$ であるから，直線 OA の方程式は $y=3ax$ である．

$C:\ y=f(x)$ と連立して，

$(x-a)(x-4a)=0$．

$p\neq a$ だから，$p=4a$．…[答]

$Q(q,\ q^2-2aq+4a^2)$ における C の接線の方程式は，

$$y=(2q-2a)(x-q)+q^2-2aq+4a^2$$

すなわち $y=2(q-a)x-q^2+4a^2$．

O を通るとき，$q^2=4a^2$．

$q>0$ だから，$q=2a$．…[答]

$a>0$ だから，$p>q$ である．

(証明おわり)

(2)　直線 OA と直線 $x=2a$ の交点を $S(2a,\ 6a^2)$ とする．

$Q(2a,\ 4a^2)$ より，三角形 OQS の面積は，

$\frac{1}{2}\cdot 2a^2\cdot 2a=2a^3$．　…①

また，線分 SP，線分 SQ および C で囲まれた図形の面積は，

$$\int_{2a}^{4a}(3ax-x^2+2ax-4a^2)\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}ax^2-4a^2x\right]_{2a}^{4a}$$

$$=\frac{10}{3}a^3.\quad\cdots②$$

①，② より，

$$S=2a^3+\frac{10}{3}a^3=\frac{16}{3}a^3.$$

…[答]

(3)　$S=\frac{2}{3}$ となるときの a の値は，$a=\frac{1}{2}$．…[答]

© 河合塾　2024 年

2

（ここには 2 の解答を記入すること。）

(1) $x+1 \geqq 2\log_t x + 1$ ((b) より)

$\therefore\ x+1 \geqq 2\log_t(\sqrt{t}x)$ …①

また，

$\sqrt{t}x-(x+1)=(\sqrt{t}-1)x-1=(\sqrt{t}-1)\left(x-\dfrac{1}{\sqrt{t}-1}\right)>0$

($t>1$ と (a) より)

より，$\sqrt{t}x > x+1\ (>0)$。これと $t>1$ より，

$2\log_t(\sqrt{t}x) > 2\log_t(x+1)$ …②

①，② より，

$x+1 > 2\log_t(x+1)$

（証明おわり）

(2) $n=1$ のとき $2\log_2 n=0$，$n=2$ のとき $2\log_2 2=2$，

$n=3$ のとき $2\log_2 3=\log_2 9>\log_2 8=3\ (=n)$，

$n=4$ のとき $2\log_2 4=4$ であるから，$n=1$ は $n\leqq 2\log_2 n$ を満たさず，$n=2,3,4$ は $n\leqq 2\log_2 n$ を満たす。

また，(1) で $t=2$ とすると，(a) は $x>\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$，(b) は $x\geqq 2\log_2 x$ となり，$x=4$ はこの (a) と (b) をともに満たす。さらに，(1) で示した不等式は $x+1>2\log_2(x+1)$ となるから，帰納的に，

$n=5,6,7,\cdots$ である n はすべて $n>2\log_2 n$ を満たす（すなわち，$n\leqq 2\log_2 n$ を満たさない）

ことがわかる。

以上より，求める n は，

$\underline{2,\ 3,\ 4}$ …[答]

© 河合塾 2024 年

3

(ここには3の解答を記入すること。)

(1) $p_2=$(左からA, Aの順に並ぶ確率)$=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$ … [答]

$q_2=$(左からB, Aの順に並ぶ確率)$=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$ … [答]

$r_2=$(左からA, Bの順に並ぶ確率)$=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$ … [答]

n文字の可の列		n+1文字の可の列
……AA	$\xrightarrow{\times\frac{1}{3}}$	……AAB
……AB	$\xrightarrow{\times\frac{2}{3}}$	……ABA
……BA	$\xrightarrow{\times\frac{2}{3}}$	……BAA
	$\searrow{\times\frac{1}{3}}$	……BAB

左図より、

$$\left.\begin{array}{ll} p_{n+1}=\frac{2}{3}q_n & \cdots① \\ q_{n+1}=\frac{2}{3}r_n & \cdots② \\ r_{n+1}=\frac{1}{3}p_n+\frac{1}{3}q_n & \cdots③ \end{array}\right\}\cdots[答]$$

(2) ①+②×2+③×2 より $p_{n+1}+2q_{n+1}+2r_{n+1}=\frac{2}{3}(p_n+2q_n+2r_n)$ が得られ、

数列$\{p_n+2q_n+2r_n\}$ $(n=2,3,4,\cdots)$ は$p_2+2q_2+2r_2=\frac{4}{3}$, 公比$\frac{2}{3}$の等比数列。したがって

$$p_n+2q_n+2r_n=\frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\ \cdots④\ \cdots[答]$$

(3) ①+②×i−③×$(1+i)$ より $p_{n+1}+iq_{n+1}-(1+i)r_{n+1}=-\frac{1+i}{3}\{p_n+iq_n-(1+i)r_n\}$ が得られ、

数列$\{p_n+iq_n-(1+i)r_n\}$ $(n=2,3,4,\cdots)$ は$p_2+iq_2-(1+i)r_2=\frac{2}{9}$, 公比$-\frac{1+i}{3}$の等比数列。したがって、

$$p_n+iq_n-(1+i)r_n=\frac{2}{9}\left(-\frac{1+i}{3}\right)^{n-2}\ \cdots⑤\ \cdots[答]$$

(4) ④+⑤×$2i$ より

$$(1+2i)p_n+(4-2i)r_n=\frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}+\frac{4}{9}i\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^{n-2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^{n-2}$$

$$\rightleftarrows\ (p_n+4r_n)+2i(p_n-r_n)=\frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}+\frac{4}{9}\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^{n-2}\left(\cos\frac{n}{4}\pi+i\sin\frac{n}{4}\pi\right)\ \cdots⑥$$

p_n, r_nは実数なので、$p_n=r_n$のとき、⑥の左辺は実数。このとき⑥の右辺も実数になるので、そのようになるのは、$\sin\frac{n}{4}\pi=0$, すなわち、nが4の倍数のときに限られる。 … [答]

© 河合塾 2024 年

4

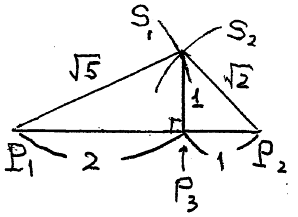
(ここには 4 の解答を記入すること。)

(1) $P_1(3,-1,1)$, $P_2(5,0,-1)$ より $P_1P_2=\sqrt{2^2+1^2+2^2}=\underline{\underline{3}}$ [答]

(2) S_1, S_2 について，中心間の距離 P_1P_2 と半径のあいだに不等式

半径の差 $=\sqrt{5}-\sqrt{2}<3<\sqrt{5}+\sqrt{2}=$ 半径の和

が成り立つ ($\because\ 2<\sqrt{5}<3$, $1<\sqrt{2}<2$) から、確かに S_1, S_2 は交わりをもつ。



Cの半径を r とおけば

$\sqrt{5-r^2}+\sqrt{2-r^2}=3$ より $r=\underline{\underline{1}}$ [答]

また $P_1P_3=2$, $P_2P_3=1$ とわかり，

P_3 は P_1P_2 を 2 : 1 に内分する点だから，$\underline{\underline{P_3\left(\frac{13}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-1}{3}\right)}}$ [答]

(3) Hは、$\overrightarrow{P_1P_2}=(2,1,-2)$ に垂直だから，Hとxy平面双方に平行なベクトルの一つを $(a,b,0)$ とおけば、$\overrightarrow{P_1P_2}$ と垂直ゆえ

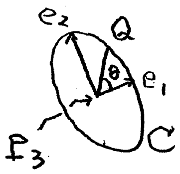
$2a+b=0 \quad \therefore\ b=-2a$

大きさを1に直して，求めるべきベクトルは $\underline{\underline{\left(\pm\frac{1}{\sqrt{5}}, \mp\frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right)}}$ [答]
(複号同順)

(4) (3)の一つを $\vec{e_1}=\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}, 0\right)$ とし， $\vec{e_1}$ および $\overrightarrow{P_1P_2}=(2,1,-2)$ 双方に垂直な単位ベクトルの一つを $\vec{e_2}=\left(\frac{4}{3\sqrt{5}}, \frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ ととることができる。

$\left(\because\ \vec{e_1}\cdot\vec{e_2}=\frac{4-4}{15}=0,\ \vec{e_2}\cdot\overrightarrow{P_1P_2}=\frac{8+2}{3\sqrt{5}}-\frac{2\sqrt{5}}{3}=0\right)$

$\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ はH上の直交する単位ベクトルだから，C上の点Qの座標を，θを用いて



$$\overrightarrow{P_3Q}=\vec{e_1}\cos\theta+\vec{e_2}\sin\theta=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\cos\theta+\frac{4}{3\sqrt{5}}\sin\theta\\ -\frac{2}{\sqrt{5}}\cos\theta+\frac{2}{3\sqrt{5}}\sin\theta\\ \frac{\sqrt{5}}{3}\sin\theta\end{pmatrix}\quad(0\leqq\theta<2\pi)$$

と表すことができる。

Cの中心のz座標が $-\frac{1}{3}$ であることに注意すれば，Qとxy平面との距離 d は，$\sin\theta=-1$ のときに最大となり，

dの最大値 $\underline{\underline{\frac{1+\sqrt{5}}{3}}}$ [答] ， $\underline{\underline{Q\left(\frac{65-4\sqrt{5}}{15}, -\frac{5+2\sqrt{5}}{15}, -\frac{1+\sqrt{5}}{3}\right)}}$ [答]

© 河合塾 2024年

※ 医学科、保健学科－放射線技術科学・検査技術科学

5 (ここには 5 の解答を記入すること。)

(1) $f'(x)=\dfrac{\frac{2}{2x-3}\cdot x-\log(2x-3)}{x^2}=\dfrac{2x-(2x-3)\log(2x-3)}{x^2(2x-3)}$ より

$g(x)=2x-(2x-3)\log(2x-3)$ ……[答]

(2) $g'(x)=-2\log(2x-3)\leqq 0$ ($\because x\geqq 2$) より $g(x)$ は減少する。

$g(2)=4>0$、$g(6)=12-9\log 9=12-18\log 3<12-18\log e<0$

よって $y=g(x)$ は $2<x<6$ でのみ x 軸と1つだけ共有点をもつので

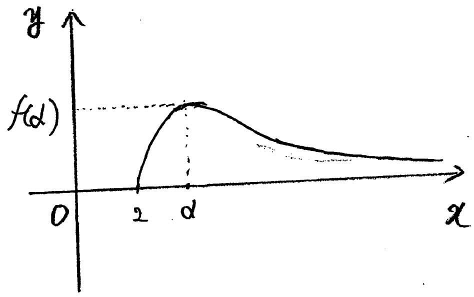
2以上の α は1つだけ存在する [証明終わり]

(3) $x\geqq 2$ のとき $x^2(2x-3)>0$ なので $f'(x)$ と $g(x)$ の符号は一致する。

増減表は図のようになる。

x	2	…	α	…
$f'(x)$		+	0	−
$f(x)$	0	↗		↘

グラフは右のようになる。



$f(2)=0$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-3}{x}\cdot\frac{\log(2x-3)}{2x-3}=0$

(4) $2\leqq m<n$ より $0<2m-3<2n-3$ なので底を e とする対数をとって

$\log(2m-3)^n=\log(2n-3)^m$

$\iff \dfrac{\log(2m-3)}{m}=\dfrac{\log(2n-3)}{n}$

$\iff f(m)=f(n)$

よって(3)のグラフで異なる x に対して等しい y の値をもつような整数の組を求めれば良い。

また(2)より $\alpha<6$ なので $m=3,4,5$ のときを調べれば十分である。

$m=3$ のとき $\dfrac{\log(2n-3)}{n}=\dfrac{\log 3}{3}$ より $n=6$

$m=4$ のとき $\dfrac{\log(2n-3)}{n}=\dfrac{\log 5}{4}$

$\dfrac{\log 5}{4}-\dfrac{\log 3}{3}=\dfrac{\log 5^3-\log 3^4}{12}>0$ より

$m=4<n<6$ となり $n=5$ となるが不成立

$m=5$ のとき $\dfrac{\log(2n-3)}{n}=\dfrac{\log 7}{5}$

同様に $\dfrac{\log 7}{5}-\dfrac{\log 3}{3}>0$ となり

不成立。

以上より

$(m,n)=(3,6)$ ……[答]

© 河合塾 2024年

※ 医学科、保健学科－放射線技術科学・検査技術科学

6 (ここには 6 の解答を記入すること。)

(1) $\overrightarrow{PR} = \dfrac{r(\theta)}{\sqrt{2}}\overrightarrow{PQ}$ より，

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \frac{r(\theta)}{\sqrt{2}}(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP})$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{r(\theta)}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \cos\theta - 0 \\ \sin\theta - 0 \\ 0 - 1 \end{pmatrix}$$

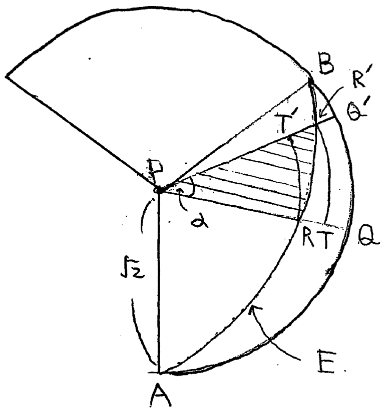
よって，$R\left(\dfrac{r(\theta)}{\sqrt{2}}\cos\theta,\ \dfrac{r(\theta)}{\sqrt{2}}\sin\theta,\ 1 - \dfrac{r(\theta)}{\sqrt{2}}\right)$。

R は平面 $H: z = x$ 上なので，

$$\frac{r(\theta)}{\sqrt{2}}\cos\theta = 1 - \frac{r(\theta)}{\sqrt{2}}$$

$$r(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{1+\cos\theta} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

(2) K の側面の展開図は次の通り。



θ が h だけ変化したとき，Q が Q′ に R が R′ に移ったとする。また，線分 PQ 上，PQ′ 上にそれぞれ

$PT = PR' = r(\theta+h)$，

$PT' = PR = r(\theta)$ となる点 T, T′ をとる。

ここで，弧 QQ′ の長さに注目し，$h = \sqrt{2}\alpha$。図の α は $\dfrac{h}{\sqrt{2}}$ である。また，$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において，$r(\theta)$ は単調増加であることを用いた。

$S(\theta+h) - S(\theta)$ は図の斜線部であるから，

$$S(\theta+h) - S(\theta) \geqq (\text{扇形 } PRT')$$

$$= \frac{1}{2}PR^2 \cdot \alpha$$

$$= \frac{h\{r(\theta)\}^2}{2\sqrt{2}}.$$

$$S(\theta+h) - S(\theta) \leqq (\text{扇形 } PR'T)$$

$$= \frac{1}{2}(PR')^2 \cdot \alpha$$

$$= \frac{h\{r(\theta+h)\}^2}{2\sqrt{2}}$$

したがって，

$$\frac{h\{r(\theta)\}^2}{2\sqrt{2}} \leqq S(\theta+h) - S(\theta) \leqq \frac{h\{r(\theta+h)\}^2}{2\sqrt{2}}.$$ (証明終

(3) (2)の結果は $0 \leqq \theta+h < \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ $(h<0)$ のときも成立し，$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta < \theta+h \leqq 0$ $(h>0)$ または $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta+h < \theta \leqq 0$ $(h<0)$ のときには，

$$\frac{h\{r(\theta)\}^2}{2\sqrt{2}} \geqq S(\theta+h) - S(\theta) \geqq \frac{h\{r(\theta+h)\}^2}{2\sqrt{2}}.$$

これらのこととはさみうちの原理より，

$$S'(\theta) = \lim_{h\to 0}\frac{S(\theta+h) - S(\theta)}{h} = \frac{\{r(\theta)\}^2}{2\sqrt{2}}$$

となる。よって，

$$S(\theta) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int\left(\frac{\sqrt{2}}{1+\cos\theta}\right)^2 d\theta$$

$\left(u = \tan\dfrac{\theta}{2}\ \text{のとき}\quad du = \dfrac{d\theta}{1+\cos\theta}\quad \dfrac{u^2+1}{2} = \dfrac{1}{1+\cos\theta}\right)$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\int(u^2+1)\,du$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{3}\tan^3\frac{\theta}{2} + \tan\frac{\theta}{2}\right) + C$$

ここで，$S\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ であるから，$C = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$。

$$S(\theta) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{3}\tan^3\frac{\theta}{2} + \tan\frac{\theta}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

$$S\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

よって，

$$T = \sqrt{2}^2\pi \times \frac{2\pi}{2\sqrt{2}\pi} \times \frac{1}{2} - \frac{2}{3}\sqrt{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\pi - \frac{2}{3}\sqrt{2}. \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

© 河合塾 2024年