第1問

Ⅰ(1) 最高点の x 座標を x_1 とする。エネルギー保存則より，

$$mgx_1\sin\theta_1 - \frac{1}{2}mv_0{}^2 = -\mu' mg\cos\theta_1 \cdot x_1 \quad \therefore x_1 = \underline{\frac{v_0{}^2}{2g(\sin\theta_1 + \mu'\cos\theta_1)}}$$

(2) 戻ったときの速度を v_1 とする。エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}mv_1{}^2 - \frac{1}{2}mv_0{}^2 = -2\mu' mgx_1\cos\theta_1 \quad \therefore \ v_1 = \underline{-\sqrt{\frac{\sin\theta_1 - \mu'\cos\theta_1}{\sin\theta_1 + \mu'\cos\theta_1}} \cdot v_0}$$

Ⅱ(1) 物体Aの加速度を a_2 として，運動方程式は，

$$ma_2 = \mu' mg\cos\theta_2 - mg\sin\theta_2 \qquad \therefore \quad a_2 = g(\mu'\cos\theta_2 - \sin\theta_2)$$

物体Aの速度がベルトと等しくなる時刻は $\dfrac{V}{g(\mu'\cos\theta_2 - \sin\theta_2)}$ であり，この時刻以降は等速度運動になる。

よって，時刻 t における速度は，$\underline{(\mu'\cos\theta_2 - \sin\theta_2)gt}$ $\left(0 < t \leqq \dfrac{V}{g(\mu'\cos\theta_2 - \sin\theta_2)}\right)$

$\underline{V}$ $\left(t > \dfrac{V}{g(\mu'\cos\theta_2 - \sin\theta_2)}\right)$

(2) 物体Aが原点に戻ったときの速度は，$\underline{v_0}$

Ⅲ(1) 物体Bの力のつり合いは，

$$kd_0 - mg\sin\theta_3 = 0 \qquad \therefore \quad d_0 = \underline{\frac{mg\sin\theta_3}{k}}$$

(2) 物体Aの力のつり合いは，

$$\mu' mg\cos\theta_3 - kd_0 - mg\sin\theta_3 = 0$$ (1)を用いて，$\mu' = \underline{2\tan\theta_3}$

(3) 物体Aと物体Bの重心加速度 a_G は，$a_G = \dfrac{\mu'\cos\theta_3 - 2\sin\theta_3}{2}g = 0$

よって，$v_G = \underline{\dfrac{V}{2}}$

(4) 重心Gに対する物体Bの相対速度は，$v_{GB} = \dfrac{V}{2}\cos\sqrt{\dfrac{2k}{m}}t$

物体Bの速度 v_B は，$v_B = v_{GB} + v_G$　よって，$v_B = \underline{\dfrac{V}{2} + \dfrac{V}{2}\cos\sqrt{\dfrac{2k}{m}}t}$

物体Aの速度 v_A は，$v_A = \dfrac{V}{2}\left(1 - \cos\sqrt{\dfrac{2k}{m}}t\right)$

$t = t_1$ で $v_A = V$ となるので，$t_1 = \underline{\pi\sqrt{\dfrac{m}{2k}}}$

(5) 物体Aに対する物体Bの速度 v_{AB} は，$v_{AB} = -V\cos\sqrt{\dfrac{k}{m}}(t - t_1)$

物体Bの速度 v_B は，$v_B = v_{AB} + V = \underline{V\left\{1 - \cos\sqrt{\dfrac{k}{m}}(t - t_1)\right\}}$

(6) 物体Aに対する物体Bの単振動の振幅は，$V\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

ばねの最大の伸びは，$d_0 + V\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ で，このときの物体Aにはたらく静止摩擦力は $k\left(d_0 + V\sqrt{\dfrac{m}{k}}\right) + mg\sin\theta_3$

物体Aがベルトに対して静止する条件は $k\left(d_0 + V\sqrt{\dfrac{m}{k}}\right) + mg\sin\theta_3 \leqq \mu mg\cos\theta_3$

(1)の答を用いて　$\underline{\mu \geqq 2\tan\theta_3 + \dfrac{V}{g\cos\theta_3}\sqrt{\dfrac{k}{m}}}$

第2問

Ⅰ(1)　下電極と金属板がつくるコンデンサーの電気容量をCとすると　$C=\dfrac{\varepsilon L^2}{d}$　なので，下電極と金属板の電位差は　$\dfrac{Q}{C}=\dfrac{d}{\varepsilon L^2}Q$となり，求める電位は　$\underline{-\dfrac{d}{\varepsilon L^2}Q}$

(2)　同じ電気容量のコンデンサーの並列接続とみなせるので，$\underline{\dfrac{Q}{2}}$

(3)　上電極と誘電体の間の電場をE_0とすると，$E_0=\dfrac{Q}{2\varepsilon_0 L^2}$

求める座標をz_0とすると力のつり合いより　$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{Q}{2}\times E_0=k(h_0-z_0)$　　$\therefore$　$z_0=\underline{h_0-\dfrac{Q^2}{8k\varepsilon_0 L^2}}$

(4)　誘電体内の電場が金属板の上下で，同じ大きさで向きが反対なので$z=0$の電位も0になる。従って求める電位は，$E_0 z_0=\underline{\dfrac{Q}{2\varepsilon_0 L^2}\left(h_0-\dfrac{Q^2}{8k\varepsilon_0 L^2}\right)}$

Ⅱ(1)　単振動の中心座標がz_0であり，$z=h_1$は上端なので，$h_1=2z_0=\underline{2\left(h_0-\dfrac{Q^2}{8k\varepsilon_0 L^2}\right)}$

(2)　上電極と誘電体上面がつくるコンデンサーの電気容量をC_1とすると，

スイッチを閉じる前に蓄えられていたエネルギーは，$U_1=\dfrac{1}{2C_1}\left(\dfrac{Q}{2}\right)^2+2\times\dfrac{1}{2C}\left(\dfrac{Q}{2}\right)^2$

スイッチを閉じて十分に長い時間が経った後は，$U_2=\dfrac{1}{2C_1}\left(\dfrac{Q}{10}\right)^2+\dfrac{1}{2C}\left(\dfrac{Q}{10}\right)^2+\dfrac{1}{2C}\left(\dfrac{9Q}{10}\right)^2$

求める発熱量をW_1とすると，$W_1=U_1-U_2$

$C_1=\dfrac{\varepsilon_0 L^2}{h_1}$，$C=\dfrac{\varepsilon L^2}{d}$なので　$W_1=\underline{\dfrac{Q^2}{25L^2}\left(\dfrac{3h_1}{\varepsilon_0}-\dfrac{4d}{\varepsilon}\right)}$

(3)　最低点が$z=0$なので，おもりを乗せた後の単振動の中心座標もⅠ(3)と同じz_0でなければならない。

おもりの質量をMとする。電荷の減少後の上電極と誘電体の間の電場をE_1とすると，$E_1=\dfrac{Q}{10\varepsilon_0 L^2}$

電荷が移動したことによって上電極にかかる鉛直下向きの力は$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{Q}{2}\times E_0-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{Q}{10}\times E_1$だけ減少する。

これがMgと等しければよいので，　$M=\underline{\dfrac{3Q^2}{25g\varepsilon_0 L^2}}$

(4)　再びスイッチを閉じて十分に長い時間が経った後の発熱量をW_2とすると，

$W_2=\dfrac{1}{2C}\left(\dfrac{Q}{10}\right)^2+\dfrac{1}{2C}\left(\dfrac{9Q}{10}\right)^2-2\times\dfrac{1}{2C}\left(\dfrac{Q}{2}\right)^2$なので

$W_1+W_2=\dfrac{1}{2C_1}\left(\dfrac{Q}{2}\right)^2-\dfrac{1}{2C_1}\left(\dfrac{Q}{10}\right)^2=\underline{\dfrac{3Q^2}{25\varepsilon_0 L^2}h_1}$

(別解)　発熱量の合計はおもりの位置エネルギーの減少分に等しいので，$Mgh_1=\underline{\dfrac{3Q^2}{25\varepsilon_0 L^2}h_1}$

第3問

I (1) $t_1 = \dfrac{L}{V}$ であり，求める時刻は，$t_1 + \dfrac{L - v_s t_1}{V} = \underline{\left(2 - \dfrac{v_s}{V}\right)\dfrac{L}{V}}$

(2) 観測される音波の振動数は$\dfrac{V}{V - v_s} f_0$であり，その1周期だから，$\underline{\dfrac{V - v_s}{V f_0}}$

(3) $\dfrac{V + v_s}{V - v_s} f_0 - f_0 = \underline{\dfrac{2v_s}{V - v_s} f_0}$

(4) うなりが観測され始めるのは，音源が点Qを通過直後だから，その時刻は $\underline{\dfrac{L}{2v_s}}$

うなりの振動数は，$\left|\dfrac{V}{V - v_s} - \dfrac{V}{V + v_s}\right| f_0 = \underline{\dfrac{2v_s V}{V^2 - v_s^2} f_0}$

II (1) うなりの振動数は，$f_h = \left|\left(2 - \dfrac{2L_0}{TV}\right) - 2\right| f_1 = \dfrac{2L_0}{TV} f_1$

よって，$L_0 = \underline{\dfrac{f_h}{2f_1} TV}$

(2) $f_A(t) = \left(2 - \dfrac{t}{T}\right) f_1$ とおく。$t_{A0} = \dfrac{2L_A}{V}$ であり，観測される振動数は

直接音：$f_A(t_{A0}) = \left(2 - \dfrac{t_{A0}}{T}\right) f_1$　　反射音：$\dfrac{V + v_r}{V - v_r} \cdot f_A(0) = \dfrac{V + v_r}{V - v_r} \cdot 2f_1$

(A)では反射音の方が振動数が大きいから，うなりの振動数は

$$\frac{V + v_r}{V - v_r} \cdot 2f_1 - \left(2 - \frac{t_{A0}}{T}\right) f_1 = \underline{2\left(\frac{2v_r}{V - v_r} + \frac{L_A}{VT}\right) f_1}$$

(3) $f_B(t) = \left(1 + \dfrac{t}{T}\right) f_1$ とおく。$t_B = t_s + \dfrac{2L_B}{V}$ であり，観測される振動数は

直接音：$f_B(t_B) = \left(1 + \dfrac{t_B}{T}\right) f_1$　　反射音：$\dfrac{V + v_r}{V - v_r} \cdot f_B(t_s) = \dfrac{V + v_r}{V - v_r} \cdot \left(1 + \dfrac{t_s}{T}\right) f_1$

(B)では直接音の方が振動数が大きいから，うなりの振動数は

$$\left(1 + \frac{t_B}{T}\right) f_1 - \frac{V + v_r}{V - v_r} \cdot \left(1 + \frac{t_s}{T}\right) f_1 = \underline{2\left\{\frac{L_B}{VT} - \frac{v_r}{V - v_r} \cdot \left(1 + \frac{t_s}{T}\right)\right\} f_1}$$

(4) 音波が反射するときの反射板の位置をLとして，

$$f_{\mathrm{h}}^{\mathrm{A}} = 2\left(\frac{2v_{\mathrm{r}}}{V-v_{\mathrm{r}}}+\frac{L}{VT}\right)f_1 \qquad f_{\mathrm{h}}^{\mathrm{B}} = 2\left(\frac{L}{VT}-\frac{v_{\mathrm{r}}}{V-v_{\mathrm{r}}}\right)f_1$$

であり，

$$\Delta f_{\mathrm{h}} = \left|f_{\mathrm{h}}^{\mathrm{A}} - f_{\mathrm{h}}^{\mathrm{B}}\right| = \underline{\frac{6v_{\mathrm{r}}}{V-v_{\mathrm{r}}}f_1}$$

(5) (4)の結果より，

$$v_{\mathrm{r}} = \frac{\Delta f_{\mathrm{h}}}{6f_1+\Delta f_{\mathrm{h}}}V = \frac{5.0\times10^2}{6\times3.0\times10^4+5.0\times10^2}\times3.4\times10^2 \fallingdotseq \underline{0.94\mathrm{m/s}}$$