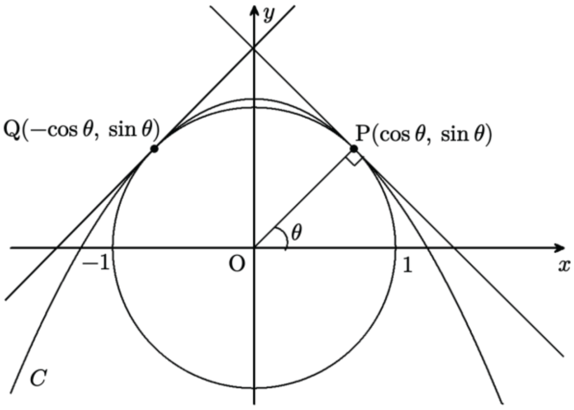
第 1 問



(1)　$C: y = ax^2 + bx + c$ は 2 点 $\mathrm{P}(\cos\theta, \sin\theta), \mathrm{Q}(-\cos\theta, \sin\theta)$ を通るので,

$$\begin{cases} \sin\theta = a\cos^2\theta + b\cos\theta + c & \cdots ① \\ \sin\theta = a\cos^2\theta - b\cos\theta + c & \cdots ② \end{cases}$$

① − ②より,

$$2b\cos\theta = 0$$

$0^\circ < \theta < 90^\circ$ より, $0 < \cos\theta < 1$ であるから,

$$b = 0$$

よって, $C: y = ax^2 + c$ であり,

$$y' = 2ax$$

C 上の点 P における接線の傾きが等しいので,

$$2a\cos\theta = -\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$2a = -\frac{1}{\sin\theta}$$
$$a = -\frac{1}{2\sin\theta}$$

①に代入して,

$$c = \sin\theta + \frac{\cos^2\theta}{2\sin\theta} = \sin\theta + \frac{1 - \sin^2\theta}{2\sin\theta} = \frac{1}{2}\left(\sin\theta + \frac{1}{\sin\theta}\right)$$

$\sin\theta = s$ とすれば,

$$a = -\frac{1}{2s}, \quad b = 0, \quad c = \frac{1}{2}\left(s + \frac{1}{s}\right) \qquad \cdots（答）$$

第　1　問（つづき１）

(2)　(1) の結果より,

$$C : y = -\frac{1}{2s}x^2 + \frac{1}{2}\left(s + \frac{1}{s}\right)$$

であり, $y = 0$ とすると,

$$0 = -\frac{1}{2s}x^2 + \frac{1}{2}\left(s + \frac{1}{s}\right)$$
$$x^2 = s^2 + 1$$
$$x = \pm\sqrt{s^2+1}$$

よって, 求める面積 A は,

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\sqrt{s^2+1}}^{\sqrt{s^2+1}} \left\{-\frac{1}{2s}x^2 + \frac{1}{2}\left(s + \frac{1}{s}\right)\right\} dx \\ &= -\frac{1}{2s}\int_{-\sqrt{s^2+1}}^{\sqrt{s^2+1}} \left(x + \sqrt{s^2+1}\right)\left(x - \sqrt{s^2+1}\right) dx \\ &= \frac{1}{2s}\cdot\frac{1}{6}\left\{\sqrt{s^2+1} - \left(-\sqrt{s^2+1}\right)\right\}^3 \\ &= \frac{2}{3s}\left(s^2+1\right)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

$\cdots$（答）

(3)

$$\begin{aligned} A^2 - 3 &= \frac{4}{9s^2}\left(s^2+1\right)^3 - 3 = \frac{4\left(s^6 + 3s^4 + 3s^2 + 1\right) - 27s^2}{9s^2} \\ &= \frac{\left(s^2+4\right)\left(2s^2-1\right)^2}{9s^2} \geqq 0 \end{aligned}$$

よって, $A^2 \geqq 3$ かつ $A > 0$ より,

$$A \geqq \sqrt{3}$$

（証明終り）

【別解１】

$0^\circ < \theta < 90^\circ$ より, $0 < s < 1$ であり, $A \geqq \sqrt{3}$ は，以下のように同値変形できる.

$$\frac{2}{3s}\left(s^2+1\right)^{\frac{3}{2}} \geqq \sqrt{3}$$
$$\frac{4\left(s^2+1\right)^3}{9s^2} \geqq 3$$

$s^2 = t$ とおくと, $0 < t < 1$ であり,

$$\frac{4(t+1)^3}{9t} \geqq 3$$
$$4t^3 + 12t^2 - 15t + 4 \geqq 0 \qquad \cdots ③$$

第　1　問（つづき２）

$0 < t < 1$ において，③が成り立つことを示せばよい．③の左辺を $f(t)$ とおくと，

$$f'(t) = 12t^2 + 24t - 15 = 3(2t+5)(2t-1)$$

よって，増減表は以下のようになる．

t	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	(1)
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

したがって，$f(t) \geqq 0$ であるから，$A \geqq \sqrt{3}$ も成り立つ．

（別解１終り）

【別解２】

$0° < \theta < 90°$ より，$0 < s < 1$ である．ここで，$s = \tan u$ とおくと，$0 < u < \frac{\pi}{4}$ であり，

$$\begin{aligned} A &= \frac{2}{3} \cdot \frac{\cos u}{\sin u} \left(\tan^2 u + 1\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{2\cos u}{3\sin u}\left(\frac{1}{\cos^2 u}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3\sin u \cos^2 u} \\ &= \frac{2}{3\sin u\left(1 - \sin^2 u\right)} \end{aligned}$$

$\sin u = p$ とおくと，$0 < p < \frac{1}{\sqrt{2}}$ であり，

$$A = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{p\left(1-p^2\right)}$$

$f(p) = p\left(1 - p^2\right)$ とおくと，

$$f(p) = p - p^3$$
$$f'(p) = 1 - 3p^2$$

よって，$0 < p < \frac{1}{\sqrt{2}}$ における増減表は以下のようになる．

p	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
$f'(p)$		$+$	0	$-$	
$f(p)$		$\nearrow$	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$	

以上より，

$$A \geqq \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)} = \sqrt{3}$$

（別解２終り）

第２問

(1)　$5^n > 10^{19}$ において，両辺の常用対数をとると，

$$\log_{10} 5^n > \log_{10} 10^{19}$$
$$n\log_{10} 5 > 19\log_{10} 10$$
$$n > \frac{19}{\log_{10} 5} \qquad \cdots ①$$

となるが，$\log_{10} 5 = \log_{10}\dfrac{10}{2} = 1-\log_{10} 2$ であるから，$0.3 < \log_{10} 2 < 0.31$ より $0.69 < \log_{10} 5 < 0.7$ である．よって，

$$\frac{19}{0.7} < \frac{19}{\log_{10} 5} < \frac{19}{0.69}$$
$$27.1\cdots < \frac{19}{\log_{10} 5} < 27.5\cdots$$

となるので，①を満たす最小の自然数 n は

$$n = 28 \qquad \cdots (答)$$

である．

(2)　自然数 m に対して，数列 $\{5^m + 4^m\}$ は m について単調増加である．すなわち，

$$5^1 + 4^1 < 5^2 + 4^2 < 5^3 + 4^3 < \cdots \qquad \cdots ②$$

である．

(1) の過程より，$5^{28} + 4^{28} > 5^{28} > 10^{19}$ であるから，$m = 27$ のときを考えると，

$$\begin{aligned}\log_{10} 5^{27} &= 27\log_{10} 5\\ &< 27\cdot 0.7\\ &= 18.9\\ &= 18 + 3\cdot 0.3\\ &< 18 + 3\log_{10} 2\\ &= \log_{10} 10^{18} + \log_{10} 2^3\\ &= \log_{10}(8\cdot 10^{18}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log_{10} 4^{27} &= 27\log_{10} 4\\ &= 27\cdot 2\log_{10} 2\\ &< 27\cdot 2\cdot 0.31\\ &= 16.74\\ &< 18\\ &= \log_{10} 10^{18}\end{aligned}$$

より，$5^{27} < 8\cdot 10^{18}$，$4^{27} < 10^{18}$ である．

したがって，$5^{27} + 4^{27} < 8\cdot 10^{18} + 10^{18} = 9\cdot 10^{18} < 10^{19}$ であるから，これと②より

$$5^1 + 4^1 < 5^2 + 4^2 < 5^3 + 4^3 < \cdots < 5^{27} + 4^{27} < 10^{19} < 5^{28} + 4^{28}$$

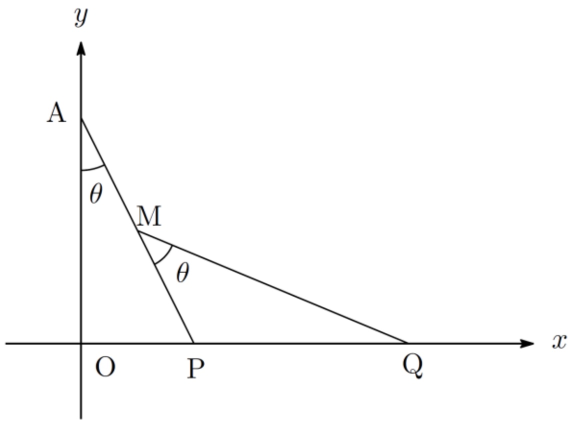
となる．つまり，$5^m + 4^m > 10^{19}$ となる最小の自然数 m は

$$m = 28 \qquad \cdots (答)$$

である．

第 3 問

(1)　O$(0,0)$, A$(0,1)$, P$(p,0)$ で，(i) より $0<p<1$ であるから，$\angle\mathrm{OAP}=\theta$ とおくと，$0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ であり，$p=\tan\theta$ である．



$\angle\mathrm{OPA}=\dfrac{\pi}{2}-\theta$ より，$\angle\mathrm{MPQ}=\pi-\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\theta+\dfrac{\pi}{2}$ である．よって，

$$\angle\mathrm{PQM}=\pi-\theta-\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}-2\theta$$

となる．

したがって，直線 MQ の傾きは

$$-\tan\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)=-\frac{1}{\tan 2\theta}=-\frac{1-\tan^2\theta}{2\tan\theta}=-\frac{1-p^2}{2p}$$

である．

また，$\mathrm{M}\left(\dfrac{p}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ であるから，直線 MQ の方程式は，

$$y=-\frac{1-p^2}{2p}\left(x-\frac{p}{2}\right)+\frac{1}{2}$$

となる．ここで $y=0$ とすると，$x=\dfrac{p(3-p^2)}{2(1-p^2)}$ を得る．これが点 Q の x 座標である．すなわち

$$q=\frac{p(3-p^2)}{2(1-p^2)} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．このとき，

$$q-p=\frac{p(p^2+1)}{2(1-p^2)}>0$$

であるから，$p<q$ も成立している．

第３問（つづき１）

(2)　(1) より，$q = \dfrac{1}{3}$ は次のように変形される．

$$\frac{p(3-p^2)}{2(1-p^2)} = \frac{1}{3}$$
$$3p^3 - 2p^2 - 9p + 2 = 0$$
$$(p-2)(3p^2+4p-1) = 0$$
$$p = 2,\quad \text{または}\ p = \frac{-2\pm\sqrt{7}}{3}.$$

$0 < p < 1$ より，

$$p = \frac{-2+\sqrt{7}}{3} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3)

$$S = \frac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OP} = \frac{p}{2},$$
$$T = \frac{1}{2}(\mathrm{M}\ \text{の}\ y\ \text{座標})\cdot\mathrm{PQ} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot(q-p) = \frac{1}{4}(q-p)$$

であるから，

$$S > T \iff 2p > q - p \iff 3p > q$$

となる．これより，

$$3p > \frac{p(3-p^2)}{2(1-p^2)}$$
$$6(1-p^2) > 3 - p^2 \qquad (p>0,\quad 1-p^2>0\ \text{より})$$
$$5p^2 < 3$$

となるから，$0 < p < 1$ との共通範囲をとって，求める p のとり得る値の範囲は

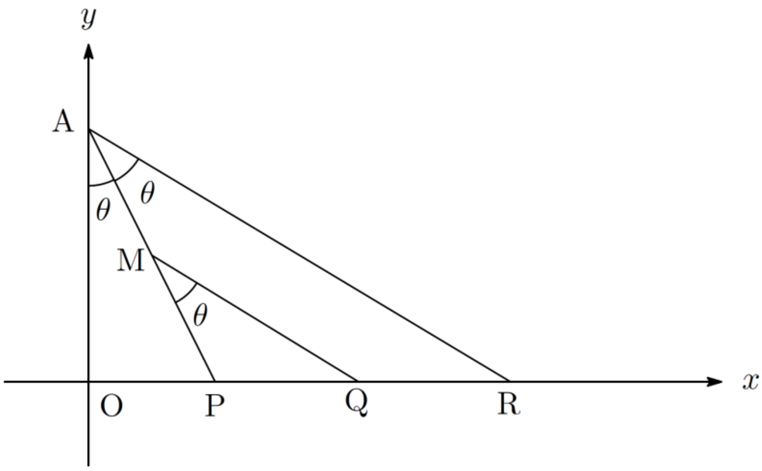
$$0 < p < \frac{\sqrt{15}}{5} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

第３問（つづき２）

【注】

次図のように，A を通る MQ の平行線を引き，x 軸との交点を $\mathrm{R}(r, 0)$ とおく．

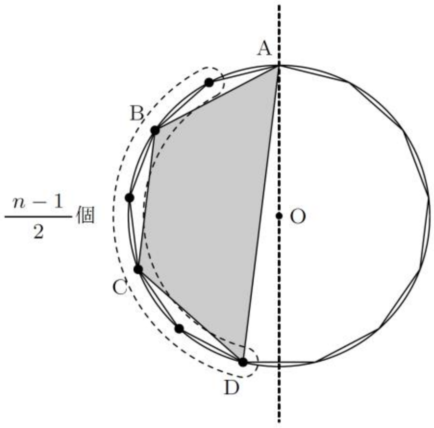


直角三角形 OAR に注目すると，$\mathrm{OA} = 1$, $\angle\mathrm{OAR} = 2\theta$ より，$\mathrm{OR} = r = \tan 2\theta$ である．
また，$\mathrm{PQ} : \mathrm{QR} = \mathrm{PM} : \mathrm{MA} = 1 : 1$ であるから，Q は２点 P, R の中点である．
よって，

$$q = \frac{p+r}{2} = \frac{1}{2}\left(p + \frac{2p}{1-p^2}\right) = \frac{p(3-p^2)}{2(1-p^2)}$$

とわかる．

第 4 問



$n=5$ のとき，どのような四角形も O を含むから，

$$p_5=1. \qquad \cdots①$$

$n \geqq 7$ のとき，余事象，すなわち四角形の内部に O を含まない場合を考える．

正 n 角形の頂点をすべて区別すると，四角形の頂点となる 4 点の選び方は，

$${}_n\mathrm{C}_4\ (\text{通り}).$$

四角形の 4 つの頂点を反時計回りの順に A，B，C，D とし，辺 AD が最長辺であるとする．このとき，直線 AD に関して，点 O と 2 点 B，C は反対側にある．

点 A の選び方は，

$$n\ (\text{通り}).$$

残りの 3 頂点は，上の図の破線で囲まれた部分の $\frac{n-1}{2}$ 個の中から 3 点を選べばよいから，

$${}_{\frac{n-1}{2}}\mathrm{C}_3(\text{通り})$$

よって，$n \geqq 7$ のときの余事象の確率は，

$$\frac{n \times {}_{\frac{n-1}{2}}\mathrm{C}_3}{{}_n\mathrm{C}_4}=\frac{4n\cdot\frac{n-1}{2}\left(\frac{n-1}{2}-1\right)\left(\frac{n-1}{2}-2\right)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}=\frac{n-5}{2(n-2)}.$$

したがって，$n \geqq 7$ のとき，

$$p_n=1-\frac{n-5}{2(n-2)}=\frac{n+1}{2(n-2)}.$$

これは，$n=5$ のとき，①を満たす．

以上から，

$$p_n=\frac{n+1}{2(n-2)}\quad(n=5,\ 7,\ 9,\ \cdots). \qquad \cdots(\text{答})$$

第４問 （つづき１）

【別解】

まず，$n=5$ のときは，選んだ 4 点を頂点とする四角形が必ず O を内部に含むので，

$$p_5 = 1$$

である．

次に，$n \geqq 7$ のときは，n 個の頂点を区別すると，n 個の頂点から異なる 4 点を選ぶ方法の数は

$${}_n\mathrm{C}_4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} \quad \text{(通り)}$$

あり，これらは同様に確からしい．

n は 7 以上の奇数であるから，

$$n = 2m+1 \quad (m \text{ は 3 以上の整数})$$

とおくことができ，n 個の頂点を反時計回りに P_1, P_2, $\cdots$, P_n $(n=2m+1)$ とすると，n は奇数であるから，これら n 個の点のうち 2 点を結んでできる線分が O を通ることはない．つまり，選んだ 4 点を頂点とする四角形の周上に O は存在しないので，O が四角形の外部にある確率を q_n とすると，内部に含む確率は

$$p_n = 1 - q_n$$

と表せる．

そこで，q_n を求めることを考える．O が四角形の外部にあるのは，四角形のある 1 辺（L とする）を含む直線に関して，その辺上にない 2 頂点がいずれも O と反対側にあるときであり，このような L の選び方は四角形 1 つに対して一意的に定まる．

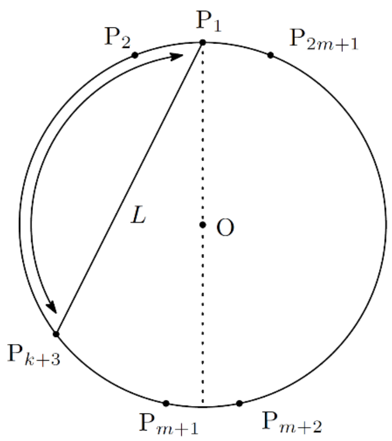
四角形を作るために，L の長さは $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_4$ の長さ以上である必要があるので，L の長さが

$$\mathrm{P}_1\mathrm{P}_{k+3} \quad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ m-2)$$

の長さに等しいときを考えると，このときの L の選び方は n 通りあり，L の上にない 2 頂点の選び方は，L を含む直線に関して O と反対側にある $k+1$ 個の点から 2 点を選ぶので，

$${}_{k+1}\mathrm{C}_2 = \frac{(k+1)k}{2} \quad \text{(通り)}$$

ある．



第４問 （つづき２）

よって，L の長さを固定したとき，O が四角形の外部にあるような 4 点の選び方は

$$n \cdot \frac{(k+1)k}{2} \quad \text{（通り）}$$

あるから，これを $k=1,\ 2,\ \cdots,\ m-2$ についての和をとれば，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m-2} n \cdot \frac{(k+1)k}{2} &= \frac{n}{2}\sum_{k=1}^{m-2}\left\{\frac{k(k+1)(k+2)}{3} - \frac{(k-1)k(k+1)}{3}\right\} \\ &= \frac{n}{2}\left\{\frac{(m-2)(m-1)m}{3} - \frac{0\cdot 1\cdot 2}{3}\right\} \\ &= \frac{n(m-2)(m-1)m}{6} \quad \text{（通り）}\end{aligned}$$

となる．$n=2m+1$ より $m=\dfrac{n-1}{2}$ を代入・整理すると

$$\frac{n(m-2)(m-1)m}{6} = \frac{n(n-1)(n-3)(n-5)}{48} \quad \text{（通り）}$$

となるので，O が四角形の外部にある確率は

$$q_n = \frac{\dfrac{n(n-1)(n-3)(n-5)}{48}}{\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}} = \frac{n-5}{2(n-2)}$$

であり，求める確率は

$$p_n = 1 - \frac{n-5}{2(n-2)} = \frac{n+1}{2(n-2)} \qquad \cdots\text{(答)}$$

となる．$p_5 = 1$ であるから，この結果は $n=5$ のときも成り立つ．