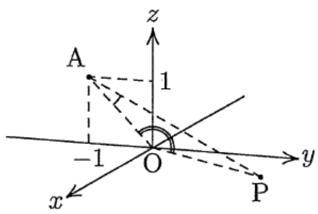
第１問

$\mathrm{P}(x,y,0)$ とおく．(i)より $(x,y)\neq(0,0)$ である．



$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{\mathrm{AO}}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{\mathrm{AP}}=\begin{pmatrix}x\\y+1\\-1\end{pmatrix}$$

であるから，

$$\cos\angle\mathrm{AOP}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OP}}|}=\frac{-y}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}},\qquad \cos\angle\mathrm{OAP}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AO}}||\overrightarrow{\mathrm{AP}}|}=\frac{y+2}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+(y+1)^2+1}}$$

となる．(ii)より $\cos\angle\mathrm{AOP}\leqq\cos\frac{2}{3}\pi$ であるから，

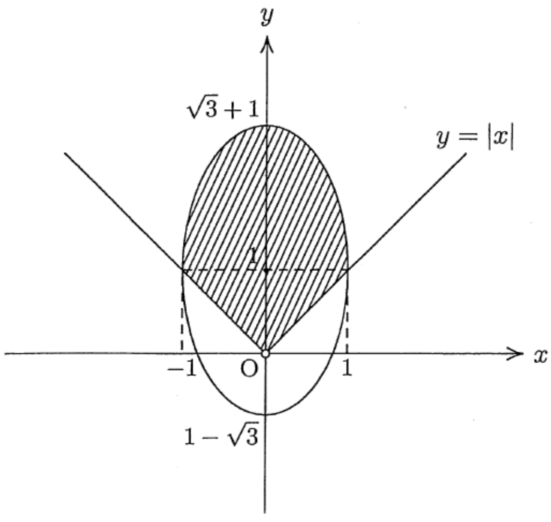
$$\frac{-y}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}}\leqq-\frac{1}{2}$$
$$\sqrt{2}\,y\geqq\sqrt{x^2+y^2}$$
$$y\geqq 0\quad\text{かつ}\quad y^2\geqq x^2$$
$$y\geqq 0\quad\text{かつ}\quad y\geqq|x|$$

である．(iii)より $\cos\angle\mathrm{OAP}\geqq\cos\frac{\pi}{6}$ であるから，

$$\frac{y+2}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+(y+1)^2+1}}\geqq\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\sqrt{2}\,(y+2)\geqq\sqrt{3}\sqrt{x^2+(y+1)^2+1}$$
$$y\geqq-2\quad\text{かつ}\quad 2(y+2)^2\geqq3\left\{x^2+(y+1)^2+1\right\}$$
$$y\geqq-2\quad\text{かつ}\quad 3x^2+y^2-2y\leqq2$$
$$y\geqq-2\quad\text{かつ}\quad x^2+\frac{(y-1)^2}{3}\leqq1$$

である．

以上より，P がとりうる範囲は図の斜線部分 (境界は O のみ除く) のようになる．

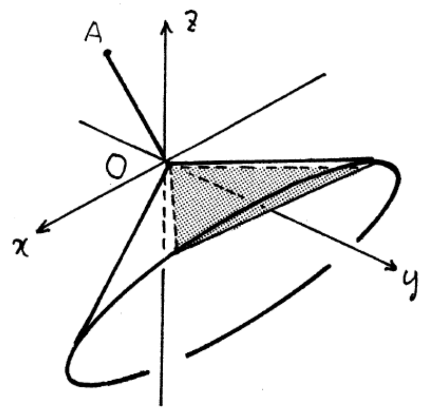


…(答)

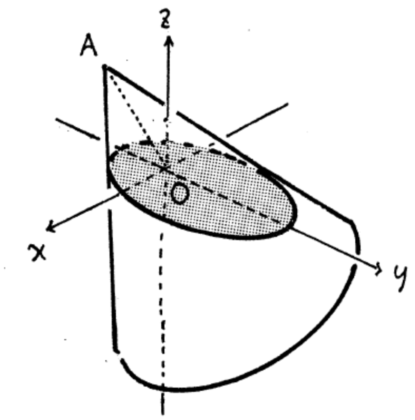
第1問（つづき）

【参考】

(ii) を満たす xy 平面上の点P



(iii) を満たす xy 平面上の点P



第２問

(1)　絶対値の定義より

$|t-x|=\begin{cases}-(t-x) & (t<x \text{ のとき}) \\ t-x & (t \geqq x \text{ のとき})\end{cases}$ である．よって，$0 \leqq x \leqq 1$ のとき，

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x \frac{x-t}{1+t^2}\,dt + \int_x^1 \frac{t-x}{1+t^2}\,dt \\ &= \int_0^x \frac{x-t}{1+t^2}\,dt + \int_1^x \frac{x-t}{1+t^2}\,dt \\ &= \left(x\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt - \int_0^x \frac{t}{1+t^2}\,dt\right) + \left(x\int_1^x \frac{1}{1+t^2}\,dt - \int_1^x \frac{t}{1+t^2}\,dt\right). \qquad \cdots ① \end{aligned}$$

積の微分の公式と，微分と積分の関係より，

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left\{\left(\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt + x\cdot\frac{1}{1+x^2}\right) - \frac{x}{1+x^2}\right\} + \left\{\left(\int_1^x \frac{1}{1+t^2}\,dt + x\cdot\frac{1}{1+x^2}\right) - \frac{x}{1+x^2}\right\} \\ &= \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt + \int_1^x \frac{1}{1+t^2}\,dt. \qquad \cdots ② \end{aligned}$$

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$ を満たす α に対して，$0<\tan\alpha<1$ であるから，

$$f'(\tan\alpha) = \int_0^{\tan\alpha} \frac{1}{1+t^2}\,dt + \int_1^{\tan\alpha} \frac{1}{1+t^2}\,dt. \qquad \cdots ③$$

$t=\tan\theta \quad \left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ と置換すると，

$\dfrac{1}{1+t^2} = \dfrac{1}{1+\tan^2\theta}$,　$\dfrac{dt}{d\theta} = (\tan\theta)' = 1+\tan^2\theta$,

t	0	$\to$	$\tan\alpha$
θ	0	$\to$	α

，

t	1	$\to$	$\tan\alpha$
θ	$\frac{\pi}{4}$	$\to$	α

となる．よって，

$$(③\text{の右辺}) = \int_0^\alpha d\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^\alpha d\theta = \alpha + \left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = 2\alpha - \frac{\pi}{4}. \qquad \cdots ④$$

$(④\text{の右辺}) = 0 \iff \alpha = \dfrac{\pi}{8}$ であり，これは $0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$ を満たすので，

$$\alpha = \frac{\pi}{8}. \qquad \cdots (\text{答})$$

(2)　$0<\dfrac{\pi}{8}<\dfrac{\pi}{2}$ より $\tan\dfrac{\pi}{8}>0$ であるから，半角公式より

$$\tan\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{1+\cos\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}} = \sqrt{2}-1. \qquad \cdots (\text{答})$$

(3)　② を微分して $f''(x) = \dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{2}{1+x^2} > 0$ であるから，$f'(x)$ は単調増加関数である．(1), (2) より $f'\left(\sqrt{2}-1\right)=0$ だったので，増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\sqrt{2}-1$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

この表より $x=\sqrt{2}-1$ のとき最小値となる．最小値は① より

$$\begin{aligned} f\left(\sqrt{2}-1\right) &= f(\tan\alpha) \\ &= \tan\alpha\int_0^{\tan\alpha} \frac{1}{1+t^2}\,dt - \int_0^{\tan\alpha} \frac{t}{1+t^2}\,dt + \tan\alpha\int_1^{\tan\alpha} \frac{1}{1+t^2}\,dt - \int_1^{\tan\alpha} \frac{t}{1+t^2}\,dt \\ &= (\tan\alpha)\alpha - \frac{1}{2}\left[\log\left(1+t^2\right)\right]_0^{\tan\alpha} + (\tan\alpha)\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}\left[\log\left(1+t^2\right)\right]_1^{\tan\alpha} \qquad \cdots ⑤ \end{aligned}$$

ここで，④ の途中式を用いた．計算を続けると，

第２問 (つづき)

$$
\begin{aligned}
(⑤の右辺) &= (\tan\alpha)\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}\log(1+\tan^2\alpha)-\frac{1}{2}\left\{\log(1+\tan^2\alpha)-\log 2\right\}\\
&=\frac{1}{2}\log 2-\log\left(1+\tan^2\alpha\right)\\
&=\frac{1}{2}\log 2-\log\left\{1+\left(\sqrt{2}-1\right)^2\right\}\\
&=\frac{1}{2}\log 2-\log\left(4-2\sqrt{2}\right).
\end{aligned}
$$
$\cdots$ (答)

増減表より, 最大値は $f(0)$ か $f(1)$ のいずれかである. ① より

$$f(0)=-\int_1^0\frac{t}{1+t^2}\,dt=\int_0^1\frac{t}{1+t^2}\,dt=\frac{1}{2}\left[\log\left(1+t^2\right)\right]_0^1=\frac{1}{2}\log 2.$$
$$f(1)=\int_0^1\frac{1}{1+t^2}\,dt-\int_0^1\frac{t}{1+t^2}\,dt=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\log 2.$$

$f(1)-f(0)=\dfrac{\pi}{4}-\log 2>\dfrac{3}{4}-0.7>0$ であるから, 最大値は

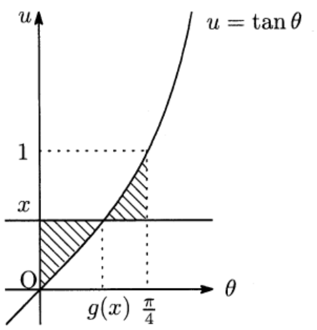
$$f(1)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\log 2.$$
$\cdots$ (答)

注意　最小値には

$$\frac{1}{2}\log 2+\log\frac{2+\sqrt{2}}{4},\quad \log\sqrt{2}+\log\frac{2+\sqrt{2}}{4},\quad \log\frac{\sqrt{2}+1}{2}$$

など, 無数の表し方がある.

(3) の補足　$\pi>3$ であることは既知とした.



【(1) の別解】　(1) で, 最初から $t=\tan\theta$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ と置換すると,

$$f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}|\tan\theta-x|\,d\theta$$

となる. これは右図の斜線部の面積である.

$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ で $\tan\theta$ は単調増加なので, 任意の実数 x に対して $\tan\varphi=x$ となる φ がただ一つ定まる. これを $g(x)$ とおく ($\tan$ の逆関数). このとき $g(x)$ は単調増加である.

$0\leqq x\leqq 1$ のとき $0\leqq g(x)\leqq\dfrac{\pi}{4}$ であるから, 被積分関数の絶対値を外すと,

$$f(x)=\int_0^{g(x)}\{-(\tan\theta-x)\}\,d\theta+\int_{g(x)}^{\frac{\pi}{4}}(\tan\theta-x)\,d\theta$$

となる. これを計算すると,

$$f(x)=2\log(\cos g(x))+2xg(x)+\log\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}x$$

となる.

$$\{\log(\cos g(x))\}'=-\frac{\sin g(x)}{\cos g(x)}\cdot g'(x)=-(\tan g(x))g'(x)=-(\tan\varphi)g'(x)=-xg'(x)$$

であるから,

$$f'(x)=-2xg'(x)+(2g(x)+2xg'(x))-\frac{\pi}{4}=2g(x)-\frac{\pi}{4}=2\varphi-\frac{\pi}{4}.$$

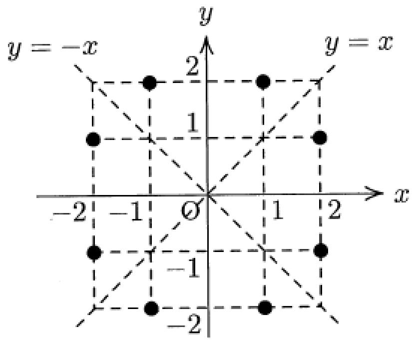
よって, $f'(x)=0\Longleftrightarrow\varphi=\dfrac{\pi}{8}$ より,

$$\alpha=\frac{\pi}{8}.$$
$\cdots$ (答)

第 3 問

⑴　右図より，

$(2,1),(1,2),(-1,2),$
$(-2,1),(-2,-1),$
$(-1,-2),(1,-2),$
$(2,-1).$　　　　…（答）



⑵　ある時刻で P が点 (a,b)にいるとき，
その 1 秒後には P は

$$\text{確率}\ \frac{1}{3}\ \text{で点}(a,-b),\ \text{確率}\ \frac{1}{3}\ \text{で点}(-a,b),$$

$$\text{確率}\ \frac{1}{6}\ \text{で点}(b,a),\ \text{確率}\ \frac{1}{6}\ \text{で点}(-b,-a)$$

にいる．点$(a,-b)$ と点$(-a,b)$ が原点対称，点(b,a) と点$(-b,-a)$ が原点対称であることから，移動前の点がどこであるかにかかわらず，移動先の点が (x,y) である確率と $(-x,-y)$である確率は等しい．したがって，$n-1$秒後の状況がどうであっても，n 秒後に P が点 (x,y)にいる確率と点$(-x,-y)$ にいる確率は等しい．

よって，n 秒後に P が点$(2,1)$にいる確率と点$(-2,-1)$にいる確率は等しい．

（証明終り）

⑶　最初から n 秒後に P が

点$(2,1)$ または 点$(-2,-1)$ にいる確率を a_n，
点$(1,2)$ または 点$(-1,-2)$ にいる確率を b_n，
点$(-1,2)$ または 点$(1,-2)$ にいる確率を c_n，
点$(-2,1)$ または 点$(2,-1)$ にいる確率を d_n

とおくと，条件（ⅱ）から，

第３問（つづき１）

$$\begin{cases} a_{n+1}=\dfrac{1}{3}b_n+\dfrac{2}{3}d_n, & \cdots① \\ b_{n+1}=\dfrac{1}{3}a_n+\dfrac{2}{3}c_n, & \cdots② \\ c_{n+1}=\dfrac{2}{3}b_n+\dfrac{1}{3}d_n, & \cdots③ \\ d_{n+1}=\dfrac{2}{3}a_n+\dfrac{1}{3}c_n, & \cdots④ \end{cases}$$

であり，

$$a_0=1,\ b_0=0,\ c_0=0,\ d_0=0$$

とすると，これは $n\geqq 0$ でも成り立つ．

①＋③，②＋④より，

$$a_{n+1}+c_{n+1}=b_n+d_n,\quad b_{n+1}+d_{n+1}=a_n+c_n$$

であるから，$a_0+c_0=1$，$b_0+d_0=0$ であることと合わせると，

$$a_n+c_n=\begin{cases}1, & (n：偶数) \\ 0. & (n：奇数)\end{cases}$$

また，①−③，④−②より，

$$a_{n+1}+c_{n+1}=b_n+d_n,\quad b_{n+1}+d_{n+1}=a_n+c_n$$

であるから，$a_0+c_0=1$，$b_0+d_0=0$ であることと合わせると，

$$a_n+c_n=\begin{cases}1, & (n：偶数) \\ 0. & (n：奇数)\end{cases}$$

また，①−③，④−②より，

$$a_{n+1}-c_{n+1}=\frac{1}{3}(d_n-b_n),\quad d_{n+1}-b_{n+1}=\frac{1}{3}(a_n-c_n)$$

であるから，

$$a_{n+2}-c_{n+2}=\frac{1}{9}(a_n-c_n).$$

ここで，

$$a_0-c_0=1,\quad a_1-c_1=\frac{1}{3}(d_0-b_0)=0$$

であることと合わせると，

$$a_n-c_n=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{9}\right)^{\frac{n}{2}}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^n, & (n：偶数) \\ 0. & (n：奇数)\end{cases}$$

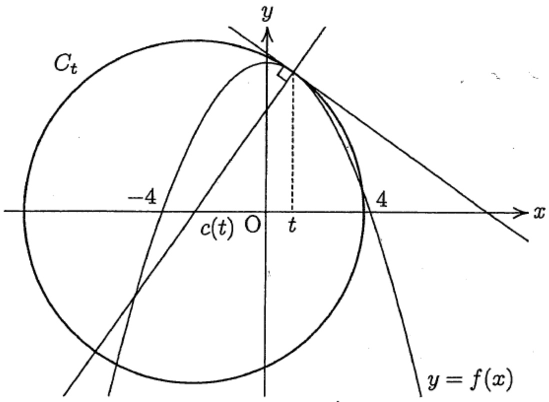
第３問（つづき２）

⑵に注意すると，$n \geqq 1$ のとき，求める確率は，

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}a_n &= \frac{1}{4}\{(a_n + c_n) + (a_n - c_n)\} \\
&= \begin{cases} \dfrac{1}{4}\left\{1 + \left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right\}, & (n：偶数) \\ 0. & (n：奇数) \end{cases}
\end{aligned}
\qquad \cdots(答)
$$

第4問

(1) 点 $(t, f(t))$ において C_t と放物線 $y=f(x)$ は共通の接線をもつので、この点における放物線 $y=f(x)$ の法線と x 軸の交点が C_t の中心 $(c(t), 0)$ である。



$f'(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}x$ より、点 $(t, f(t))$ $(0<t<4)$ における放物線 $y=f(x)$ の法線の方程式は、

$$y - f(t) = \frac{\sqrt{2}}{t}(x-t) \quad \text{すなわち} \quad y = \frac{\sqrt{2}}{t}x - \frac{\sqrt{2}}{4}t^2 + 3\sqrt{2}.$$

ゆえに、この法線が $(c(t), 0)$ を通ることより

$$c(t) = \frac{1}{4}t^3 - 3t \quad (\text{これは } t \text{ の整式である}). \quad \cdots(\text{答})$$

また、C_t は点 $(t, f(t))$ を通るので、

$$\begin{aligned}\{r(t)\}^2 &= \{t-c(t)\}^2 + \{f(t)\}^2 \\ &= \left\{-\frac{1}{4}t(t^2-16)\right\}^2 + \left\{-\frac{\sqrt{2}}{4}(t^2-16)\right\}^2 \\ &= \frac{1}{16}(t^2+2)(t^2-16)^2 \\ &= \frac{1}{16}(t^2+2)(t+4)^2(t-4)^2 \quad (\text{これは } t \text{ の整式である}). \quad \cdots(\text{答})\end{aligned}$$

$0<t<4$ のとき、$\frac{1}{16}(t^2+2)(t+4)^2(t-4)^2 > 0$ より、$\{r(t)\}^2 = \frac{1}{16}(t^2+2)(t+4)^2(t-4)^2$ なる $r(t) > 0$ がとれる。このとき、点 $(c(t), 0)$ を中心とする半径 $r(t)$ の円は、点 $(t, f(t))$ において放物線 $y=f(x)$ と共通の接線をもつ円となっている。

(2) C_t が点 $(3, a)$ を通るのは、

$$\{3-c(t)\}^2 + a^2 = \{r(t)\}^2$$

すなわち、

$$a^2 = \frac{1}{16}(t^2+2)(t+4)^2(t-4)^2 - \left(-\frac{1}{4}t^3+3t+3\right)^2 \quad \cdots ①$$

が成り立つときである。ゆえに C_t が点 $(3, a)$ を通るような $0<t<4$ なる t の個数は等式① をみたす $0<t<4$ なる t の個数に等しい。

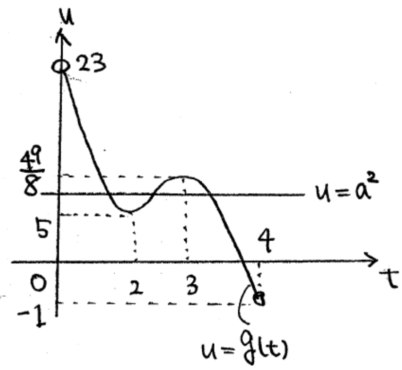
ここで、① の右辺を $g(t)$ とおくと、$g(t) = \frac{1}{16}(t^2+2)(t^2-16)^2 - \left(-\frac{1}{4}t^3+3t+3\right)^2$ より、

第4問（つづき）

$$g'(t) = \frac{1}{16}\cdot 2t\cdot(t^2-16)^2 + \frac{1}{16}(t^2+2)\cdot 2(t^2-16)\cdot 2t - 2\left(-\frac{1}{4}t^3+3t+3\right)\left(-\frac{3}{4}t^2+3\right)$$
$$= \frac{1}{8}t(t^2-16)(3t^2-12) - \frac{3}{8}(t^3-12t-12)(t^2-4)$$
$$= \frac{3}{8}(t^2-4)\{t(t^2-16)-(t^3-12t-12)\}$$
$$= -\frac{3}{2}(t+2)(t-2)(t-3).$$

ゆえに，$g(t)$ の $0<t<4$ における増減は次の表のようになる．

t	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$g'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(t)$	23	$\searrow$	5	$\nearrow$	$\frac{49}{8}$	$\searrow$	-1



①をみたす $0<t<4$ なる t の個数は 2 つのグラフ $u=a^2$ および $u=g(t)$ の $0<t<4$ における交点の個数に等しく，$f(3)=\frac{7\sqrt{2}}{4}$ より $0<a^2<\frac{49}{8}$ であるから，

その個数は，

$$\begin{cases} 0<a^2<5 & \text{のとき，1個} \\ a^2=5 & \text{のとき，2個} \\ 5<a^2<\frac{49}{8} & \text{のとき，3個} \end{cases}$$

すなわち，

$$\begin{cases} 0<a<\sqrt{5} & \text{のとき　1個} \\ a=\sqrt{5} & \text{のとき　2個} \\ \sqrt{5}<a<\frac{7\sqrt{2}}{4} & \text{のとき　3個} \end{cases} \quad \cdots（答）$$

となる．

（注）(1) において $\{h(t)\}^2 = \frac{1}{16}t^6 - \frac{15}{8}t^4 + 12t^2 + 32$ と展開して答えても可．

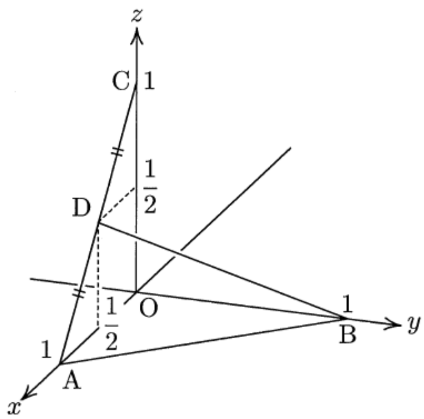
また このとき，$g(t) = -\frac{3}{8}t^4 + \frac{3}{2}t^3 + 3t^2 - 18t + 23$ とかけ，

$$g'(t) = -\frac{3}{2}t^3 + \frac{9}{2}t^2 + 6t - 18 = -\frac{3}{2}(t+2)(t-2)(t-3)$$

のように計算してもよい．

第５問

Dは線分ACの中点であるから，$\mathrm{D}\left(\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2}\right)$である．



以下，tを実数とし，点$(t,\ 0,\ 0)$をIとする．また，三角形ABDの周および内部をx軸のまわりに１回転させて得られる立体をKとする．

３点A，B，Dの配置から，Kが平面$x=t$と共有点をもつようなtの範囲は$0 \leqq t \leqq 1$であり，このとき，平面$x=t$が辺BDと共有点をもつ場合と，平面$x=t$が辺ADと共有点をもつ場合に分けると，Kを平面$x=t$で切断したときの断面は次の(i)，(ii)のようになる．

(i)　$0 \leqq t < \frac{1}{2}$のとき．

平面$x=t$と辺ABの交点をP，平面$x=t$と辺BDの交点をQとする．

Kを平面$x=t$で切断したときの断面は，線分PQ(両端を含む)を平面$x=t$上でIのまわりに１回転させて得られる図形である．

ここで，直線ABはxy平面上の方程式$y=-x+1$が表す直線なので，$\mathrm{P}(t,\ -t+1,\ 0)$である．

また，Qは辺BDを$t:\left(\frac{1}{2}-t\right)=2t:(1-2t)$に内分する点であるから，

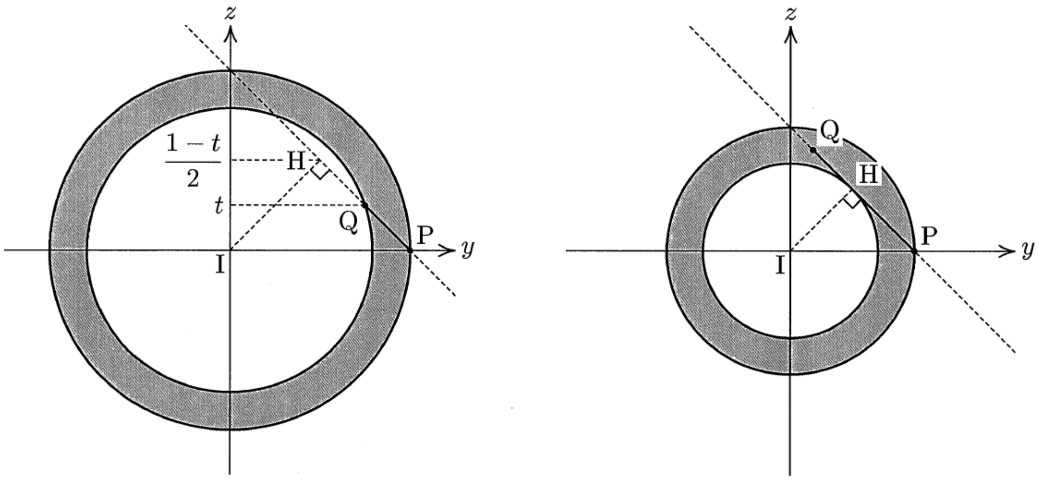
$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-2t)(0,\ 1,\ 0)+2t\left(\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2}\right)=(t,\ 1-2t,\ t).$$

これより，$\mathrm{Q}(t,\ 1-2t,\ t)$である．

第５問 （つづき１）

したがって，平面 $x=t$ 上において直線 PQ の方程式は $y+z=1-t$ と表せるから，I から直線 PQ に下ろした垂線の足を H とすると，$\mathrm{H}\left(t,\ \dfrac{1-t}{2},\ \dfrac{1-t}{2}\right)$ となる．

$t \leqq \dfrac{1-t}{2}$，すなわち，$0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{3}$ のとき．　　$\dfrac{1-t}{2} \leqq t$，すなわち，$\dfrac{1}{3} \leqq t < \dfrac{1}{2}$ のとき．



よって，線分 PQ(両端を含む) が H を含むか否かに着目すると，線分 PQ(両端を含む) を平面 $x=t$ 上で I のまわりに１回転させて得られる図形は I を中心とする円環領域で，上の図の網掛け部分のようになる．

(ii) $\dfrac{1}{2} \leqq t \leqq 1$ のとき．

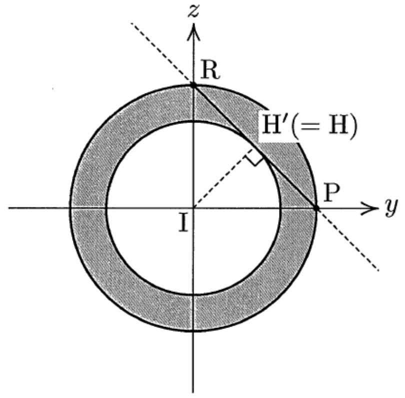
P を (i) で定めた点とし，平面 $x=t$ と辺 AD の交点を R とする．

K を平面 $x=t$ で切断したときの断面は，線分 PR(両端含む) を平面 $x=t$ 上で I のまわりに１回転させて得られる図形である．

ここで，直線 AD は zx 平面上の方程式 $z=-x+1$ が表す直線なので，$\mathrm{R}(t,\ 0,\ -t+1)$ である．

したがって，線分 PR(両端含む) を平面 $x=t$ 上で I のまわりに１回転させて得られる図形は I を中心とする円環領域で，次の図の網掛け部分のようになる．ただし，H′ は I から直線 PR に下ろした垂線の足である．すなわち，H′ は (i) の H と同じ点である．

第５問 (つづき２)



(i), (ii) より，K を平面 $x=t$ で切断したときの断面の面積を $S(t)$ とすると，

$0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{3}$ のとき，$S(t)=\pi \mathrm{IP}^2-\pi \mathrm{IQ}^2=\pi(1-t)^2-\pi\{(1-2t)^2+t^2\}=\pi(2t-4t^2)$,

$\dfrac{1}{3} \leqq t \leqq 1$ のとき，$S(t)=\pi \mathrm{IP}^2-\pi \mathrm{IH}^2=\pi(1-t)^2-\pi\left(\dfrac{1-t}{\sqrt{2}}\right)^2=\dfrac{\pi}{2}(1-t)^2$.

よって，K の体積は,

$$\begin{aligned}\int_0^1 S(t)\,dt &= \int_0^{\frac{1}{3}} \pi(2t-4t^2)\,dt+\int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{\pi}{2}(1-t)^2\,dt \\ &= \left[\pi\left(t^2-\frac{4}{3}t^3\right)\right]_0^{\frac{1}{3}}+\left[-\frac{\pi}{6}(1-t)^3\right]_{\frac{1}{3}}^1 \\ &= \frac{\pi}{9}. \end{aligned}$$

$\cdots$(答)

【注】

$t=0$ のとき，２点 P，Q は一致する．また，$t=1$ のとき，２点 P，R は一致する．しかし，いずれの場合においても【解答】で求めた「K を平面 $x=t$ で切断したときの断面の面積」の式は成り立つので,【解答】では，このことに言及せずに議論を行った．

第５問 (つづき３)

【参考 1】

三角形 ABD の周および内部と平面 $x=t$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ の共通部分 (【解答】の線分 PQ や線分 PR に相当する部分) を次のようにして求めることもできる．

座標空間内の点 P が三角形 ABD の周および内部に含まれるための必要十分条件は，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+m\overrightarrow{\mathrm{AB}}+n\overrightarrow{\mathrm{AD}} \text{ かつ } m \geqq 0 \text{ かつ } n \geqq 0 \text{ かつ } m+n \leqq 1$$

を満たす実数 m，n が存在することである．

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+m\overrightarrow{\mathrm{AB}}+n\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ から，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1,\ 0,\ 0)+m(-1,\ 1,\ 0)+n\left(-\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2}\right)=\left(1-m-\frac{1}{2}n,\ m,\ \frac{1}{2}n\right).$$

よって，三角形 ABD の周および内部と平面 $x=t$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ の共通部分は，

$$t=1-m-\frac{1}{2}n \text{ かつ } y=m \text{ かつ } z=\frac{1}{2}n \text{ かつ } m \geqq 0 \text{ かつ } n \geqq 0 \text{ かつ } m+n \leqq 1 \qquad \cdots(*)$$

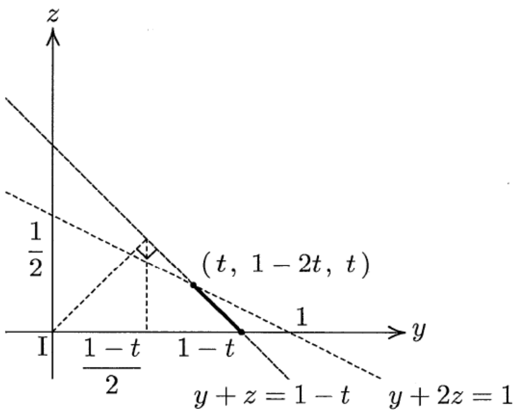
を満たす実数 m，n が存在するような点 $(t,\ y,\ z)$ 全体の集合である．

さらに，

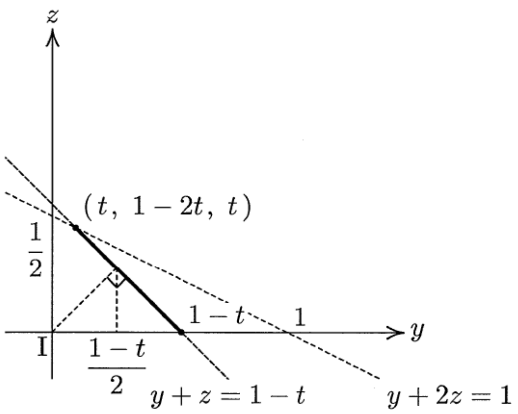
$$\begin{aligned}&(*) \text{ を満たす実数 } m,\ n \text{ が存在する}\\ \iff\ & y+z=1-t \text{ かつ } y \geqq 0 \text{ かつ } z \geqq 0 \text{ かつ } y+2z \leqq 1\end{aligned}$$

であるから，三角形 ABD の周および内部と平面 $x=t$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ の共通部分は，次の図の太線部分のようになる．

$\dfrac{1-t}{2} \leqq 1-2t$，すなわち，$0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{3}$ のとき．

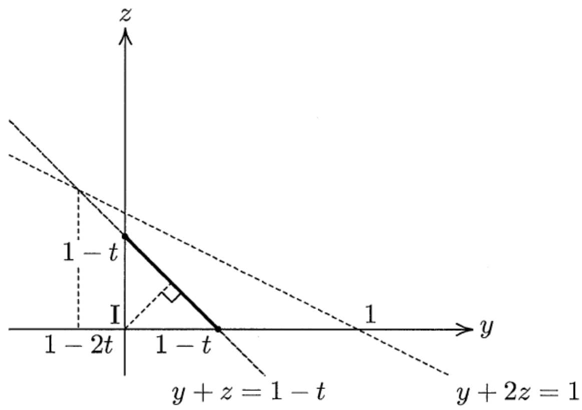


$0 \leqq 1-2t \leqq \dfrac{1-t}{2}$，すなわち，$\dfrac{1}{3} \leqq t \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき．



第５問（つづき４）

$1-2t \leqq 0$，すなわち，$\dfrac{1}{2} \leqq t \leqq 1$ のとき．



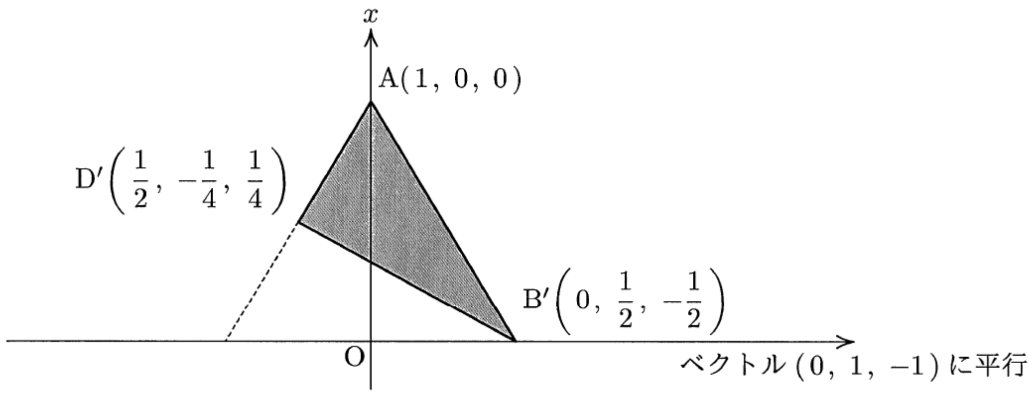
（参考１終り）

【参考 2】

x 軸に垂直な平面と平面 ABD の交線は直線 BC に平行である．

したがって，直線 BC に平行で x 軸を含む平面を π とし，2 点 B，D の π への正射影をそれぞれ B'，D' とすると，本問で求める体積は三角形 $\mathrm{AB'D'}$ を x 軸のまわりに 1 回転させて得られる立体の体積と等しい．なぜなら，三角形 $\mathrm{AB'D'}$ を x 軸のまわりに 1 回転させて得られる立体を平面 $x=t$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ で切断したときの断面の面積が $S(t)$ と等しくなるからである．

また，計算することにより，$\mathrm{B}'\left(0,\ \dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$，$\mathrm{D}'\left(\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{4}\right)$ であることがわかる．



第５問 （つづき５）

このことを利用すると，

$$\frac{1}{3}\cdot\pi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\cdot 1-\frac{1}{3}\cdot\pi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\cdot\frac{1}{3}=\frac{\pi}{9}$$

として，本問の体積を求めることができる．

(参考２終り)

第 6 問

(1)
$$f(n)=n(n^2+10n+20)$$
より，$f(n)$ が素数であるとき，n はその素数の約数である．

よって，$f_1(x)=x^2+10x+20$ とおくとき，ある整数 n に対して $f(n)$ が素数となるのは，次のいずれかである．

（Ⅰ）　$n=1$ で $f_1(1)$が素数

（Ⅱ）　$n=-1$ で $f_1(-1)$が素数の-1倍

（Ⅲ）　$n=p$ (p：素数)で，$f_1(p)=1$

（Ⅳ）　$n=-q$ (q：素数)で，$f_1(-q)=-1$

ここで，
$$f_1(1)=31,\ f_1(-1)=11.$$
また，$f_1(p)=1$ すなわち，
$$p^2+10p+20=1$$
を満たす素数 p は存在せず，$f_1(-q)=-1$ を解くと，
$$q^2-10q+21=0.$$
$$(q-3)(q-7)=0.$$
$$q=3,7.$$
以上より，
$$n=1,-3,-7.$$
…(答)

(2)
$$g(n)=n(n^2+an+b)$$
より，$g_1(x)=x^2+ax+b$ とおくと，ある整数 n に対して $g(n)$ が素数となるのは，次のいずれかである．

（ⅰ）　$n=1$ で $g_1(1)$が素数

（ⅱ）　$n=-1$ で $g_1(-1)$が素数の-1倍

（ⅲ）　$n=p$ (p：素数)で，$g_1(p)=1$

（ⅳ）　$n=-q$ (q：素数)で，$g_1(-q)=-1$

第6問（つづき1）

（ⅰ）から，

$$a+b+1 \text{ が素数.} \qquad \cdots①$$

（ⅱ）から，

$$a-b-1 \text{ が素数.} \qquad \cdots②$$

（ⅲ）から，ある素数 p に対して，

$$p^2+ap+b=1. \qquad \cdots③$$

（ⅳ）から，ある素数 q に対して，

$$q^2-aq+b=-1. \qquad \cdots④$$

ここで，（ⅲ），（ⅳ）がともに成り立つとすると，③－④より，

$$(p+q)(p-q+a)=2$$

となるが，p, q は素数より $p+q>2$ であるから，これを満たす素数 p, q は存在しない．

よって，（ⅲ），（ⅳ）がともに成り立つことはない．　…（＊）

ここで，（ⅲ）を満たす素数 p は高々2個，（ⅳ）を満たす素数 q も高々2個であるため，（＊）に注意すると，

（イ）（ⅰ）かつ（ⅱ）の下では，（ⅲ）を満たす素数が2個存在しない

（ロ）（ⅰ）かつ（ⅱ）の下では，（ⅳ）を満たす素数が2個存在しない

を示せばよい．

<u>（イ）について</u>

（ⅲ）を満たす素数 p が2個存在するとし，それらを p_1, p_2 とおくと，解と係数の関係から，

$$p_1+p_2=-a. \qquad \cdots⑤$$

一方，①，②から，$(a+b+1)+(a-b-1)>0$ すなわち $a>0$ であるから，⑤は成り立たない．

よって，（イ）が示された．

第 6 問 (つづき 2)

(ロ)について

(ⅳ)を満たす素数が 2 個存在するとし，それらを q_1, q_2 とおくと，解と係数の関係より，

$$q_1 + q_2 = a,\ q_1 q_2 = b + 1$$

であるから，

$$\begin{aligned} a - (b+1) &= q_1 + q_2 - q_1 q_2 \\ &= 1 - (q_1 - 1)(q_2 - 1) \\ &< 0 \quad (q_1,\ q_2 \text{は異なる素数より}) \end{aligned}$$

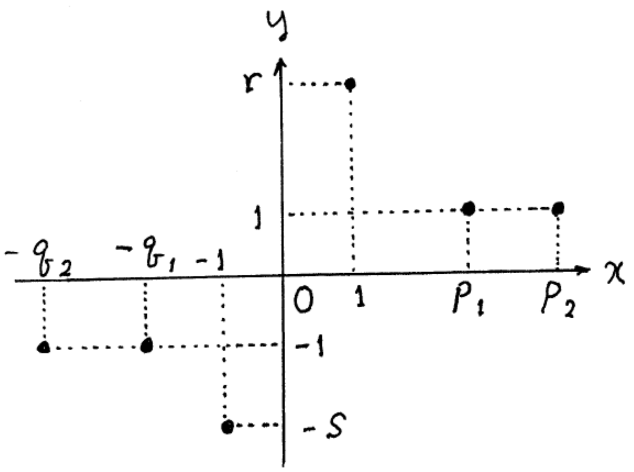
となるが，これは②に反す.

よって，(ロ)が示された.

以上より，題意が示された.　（証明終り）

第6問（つづき3）

【参考】



(p_1, p_2, q_1, q_2, r, s はすべて素数)

(2)は「下に凸の放物線 $y = g_1(x)$ が上図の6点のうち4点以上を通ることはないことを示せ」と読み替えられる．これは，以下のように説明できる．

(a)第1象限の3点のうち，2点以上を通る下に凸な放物線は，第3象限を通過しない．

(b)第3象限の3点すべてを通る下に凸な放物線は存在しない．

(c)放物線 $y = g_1(x)$ が上図の4点以上を通るとすると，第1象限の点，第3象限の点をともに通ることになるが，(a)より第1象限の点は高々1個しか通らず，(b)より第3象限の点は高々2個しか通らないので矛盾する．