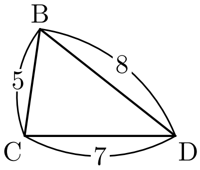
I

〔1〕(1)　三角形 BCD に余弦定理を用いて，

$$\cos\angle\mathrm{CBD}=\frac{\mathrm{DB}^2+\mathrm{BC}^2-\mathrm{CD}^2}{2\mathrm{DB}\cdot\mathrm{BC}}$$
$$=\frac{8^2+5^2-7^2}{2\cdot8\cdot5}$$
$$=\frac{1}{2}.$$

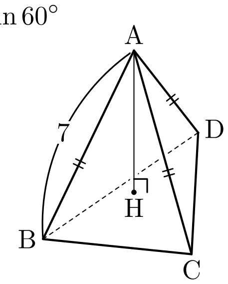


よって，

$$\angle\mathrm{CBD}\overset{\text{ア}}{=}\boxed{60^\circ}.$$

また，

$$\triangle\mathrm{BCD}=\frac{1}{2}\mathrm{DB}\cdot\mathrm{BC}\sin\angle\mathrm{CBD}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot8\cdot5\sin60^\circ$$
$$\overset{\text{イ}}{=}\boxed{10\sqrt{3}}.$$



(2)　三平方の定理より，

$$\mathrm{BH}^2=\mathrm{AB}^2-\mathrm{AH}^2,$$
$$\mathrm{CH}^2=\mathrm{AC}^2-\mathrm{AH}^2,$$
$$\mathrm{DH}^2=\mathrm{AD}^2-\mathrm{AH}^2$$

であることと，AB = AC = AD であることから

$$\mathrm{BH}=\mathrm{CH}=\mathrm{DH}$$

を得る．したがって，H は三角形 BCD の外心であり，BH は外接円の半径である．

よって，三角形 BCD に正弦定理を用いて，

$$2\mathrm{BH}=\frac{\mathrm{CD}}{\sin\angle\mathrm{CBD}}.$$

$$\mathrm{BH}=\frac{7}{2\sin60^\circ}\overset{\text{ウ}}{=}\boxed{\frac{7\sqrt{3}}{3}}.$$

(3)　三平方の定理より，

$$\mathrm{AH}=\sqrt{\mathrm{AB}^2-\mathrm{BH}^2}$$
$$=\sqrt{7^2-\left(\frac{7\sqrt{3}}{3}\right)^2}$$
$$\overset{\text{エ}}{=}\boxed{\frac{7\sqrt{6}}{3}}.$$

よって，四面体 ABCD の体積を V とすると，

$$V=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{BCD}\cdot\mathrm{AH}$$
$$=\frac{1}{3}\cdot10\sqrt{3}\cdot\frac{7\sqrt{6}}{3}$$
$$\overset{\text{オ}}{=}\boxed{\frac{70\sqrt{2}}{3}}.$$

〔2〕(1)　a_n は n を 3 進法で表したものであるから，右の筆算より，

```
3 ) 25          3 ) 50
3 )  8 … 1      3 ) 16 … 2
3 )  2 … 2      3 )  5 … 1
     0 … 2      3 )  1 … 2
                     0 … 1
```

$$a_{25}\overset{\text{カ}}{=}\boxed{221}_{(3)},$$
$$a_{50}\overset{\text{キ}}{=}\boxed{1212}_{(3)}.$$

(2)　初めて 6 桁になるのは

$$100000_{(3)}=3^5=243$$

より，第 $\overset{\text{ク}}{\boxed{243}}$ 項である．

(3)　a_n が k 桁となる条件は，整数 n が

$$3^{k-1}\leqq n<3^k$$

を満たすことであるから，k 桁である項は

$$3^k-3^{k-1}\overset{\text{ケ}}{=}\boxed{2\cdot3^{k-1}}\ 個$$

あり，その最後の項は $\overset{\text{コ}}{\boxed{3^k-1}}$ である．

よって，k 桁の項の総和を S とすると，S は

初項 3^{k-1}，末項 3^k-1，項数 $2\cdot3^{k-1}$

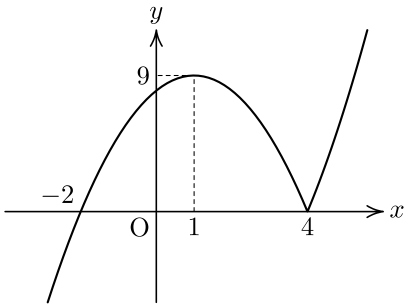
の等差数列の和であるから，

$$S=\frac{2\cdot3^{k-1}}{2}\{3^{k-1}+(3^k-1)\}$$
$$\overset{\text{サ}}{=}\boxed{3^{k-1}(4\cdot3^{k-1}-1)}.$$

〔3〕(1)　$F(x)=(x+2)(x-4)=(x-1)^2-9$ に対し，

$$f(x)=\begin{cases}-F(x) & (\ x<4 \text{ のとき }),\\ F(x) & (\ x \geqq 4 \text{ のとき }).\end{cases}$$

よって，$y=f(x)$ のグラフは次のようになる．



したがって，最も適当な選択肢は $\overset{\text{シ}}{\boxed{\text{(c)}}}$ である．

(2)　2 次関数のグラフの対称性より，$t<4$ で $f(t-1)=f(t)$ となるのは

$$\frac{(t-1)+t}{2}=1 \quad \text{すなわち} \quad t=\frac{3}{2}$$

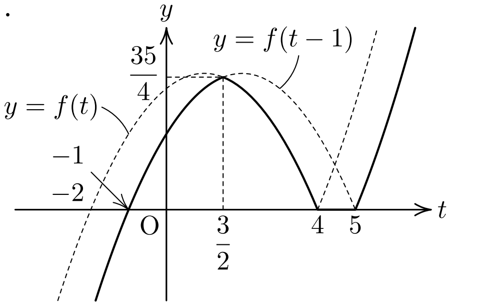
のときであり，$x=4$ が定義域に含まれるのは

$$t-1 \leqq 4 \leqq t \quad \text{すなわち} \quad 4 \leqq t \leqq 5$$

のときであるから，

$$g(t)=\begin{cases} f\left(\overset{\text{ソ}}{\boxed{t-1}}\right) & \left(t<\overset{\text{ス}}{\boxed{\dfrac{3}{2}}} \text{ のとき}\right),\\ f\left(\dfrac{1}{2}\right)=f\left(\dfrac{3}{2}\right) & \left(t=\dfrac{3}{2} \text{ のとき}\right),\\ f\left(\overset{\text{タ}}{\boxed{t}}\right) & \left(\dfrac{3}{2}<t \leqq 4 \text{ のとき}\right),\\ f(4) & \left(4<t \leqq \overset{\text{セ}}{\boxed{5}} \text{ のとき}\right),\\ f\left(\overset{\text{チ}}{\boxed{t-1}}\right) & (\ 5<t \text{ のとき }).\end{cases}$$

(3)　$y=f(t-1)$ のグラフは $y=f(t)$ のグラフを t 軸方向に $+1$ だけ平行移動したものであることに注意して，$y=g(t)$ のグラフは次のようになる．



したがって，最も適当な選択肢は $\overset{\text{ツ}}{\boxed{\text{(c)}}}$ である．

II

$a+b+c=100$ の両辺を 100 で割って,

$x+y+z=1$ すなわち $z=1-(x+y)$. $\cdots$①

$a \geqq 0$, $b \geqq 0$, $c \geqq 0$ より,（ ① も考慮して ）

$x \geqq 0$,　$y \geqq 0$,　$x+y \leqq 1$. $\cdots$②

新商品 100 g 中の栄養成分 L , M , N の含有量を順に W_{L} [g] , W_{M} [g] , W_{N} [mg] とし，新商品 100 g に対する仕入れ価格を P とすると,

$$W_{\mathrm{L}} = a\cdot\frac{3}{100}+b\cdot\frac{1}{100}+c\cdot\frac{4}{100}$$
$$=3x+y+4z$$
$$=3x+y+4\{1-(x+y)\} \quad (\text{① より})$$
$$=4-(x+3y) .$$

同様に,

$$W_{\mathrm{M}}=4x+8y+10z$$
$$=10-2(3x+y) .$$
$$W_{\mathrm{N}}=2.5x+0.6y+1.9z$$
$$=1.9+0.1(6x-13y) .$$
$$P=rx+100y+120z$$
$$=120-\{(120-r)x+20y\} .$$

〔1〕 $x:y:z=a:b:c=1:2:3$ のとき,

$$y=2x , \quad z=3x$$

であり，これと ① より，$x=\dfrac{1}{6}$, $y=\dfrac{1}{3}$.

よって,

$$W_{\mathrm{L}}=4-\left(\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{3}\right)\overset{ア}{=}\boxed{\frac{17}{6}} .$$

〔2〕 $y=\dfrac{1}{8}$ かつ $W_{\mathrm{N}} \geqq 2$ となる条件は,

$$1.9+0.1\left(6x-13\cdot\frac{1}{8}\right) \geqq 2 .$$

$$6x-\frac{13}{8} \geqq 1 \quad \text{すなわち} \quad x \geqq \frac{7}{16} .$$

これと ② より，x のとり得る値の範囲は

$$\overset{イ}{\boxed{\frac{7}{16}}} \leqq x \leqq \frac{7}{8} .$$

〔3〕 ① , ② に加えて，$W_{\mathrm{L}} \geqq 3$ かつ $W_{\mathrm{M}} \geqq s$ となる条件は,

$$4-(x+3y) \geqq 3 \quad \text{かつ} \quad 10-2(3x+y) \geqq s .$$

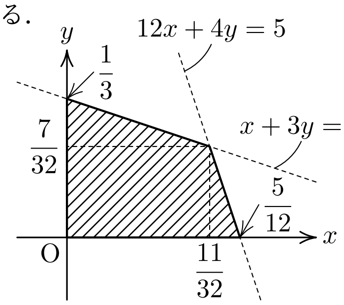
$$x+3y \leqq 1 \quad \text{かつ} \quad 2(3x+y) \leqq 10-s . \quad \cdots③$$

これと ② を満たす点（x, y）の存在領域を D とする.

(1) $s=7.5$ のとき，③ は

$$x+\overset{ウ}{\boxed{3}}y \leqq \overset{エ}{\boxed{1}} \quad \text{かつ} \quad 12x+\overset{オ}{\boxed{4}}y \leqq \overset{カ}{\boxed{5}}$$

となるから，D は次図斜線部 (境界を含む) のようになる.



一方，$r=80$ のとき $P=120-20(2x+y)$ であるから，P が最小になるのは $2x+y$ が最大のときである.

$2x+y=k$ とおくと，これは xy 平面上の傾き -2 , y 切片 k の直線を表す.

これが D と共有点を持つような k の最大値は,

$(x,\ y)=\left(\dfrac{11}{32},\ \dfrac{7}{32}\right)$ のときの $k=\dfrac{29}{32}$.

よって,

$$x\overset{キ}{=}\boxed{\frac{11}{32}} , \quad y\overset{ク}{=}\boxed{\frac{7}{32}} , \quad z=1-(x+y)\overset{ケ}{=}\boxed{\frac{7}{16}}$$

のとき，P は最小値 $120-20k\overset{コ}{=}\boxed{\dfrac{815}{8}}$ をとる.

(2) $s=7.5$ より D は (1) と同じであるから，(1) と同じ（x, y）でのみ P が最小となる条件は，$(120-r)x+20y=k$ を xy 平面上の直線と見たときの傾き $-\dfrac{120-r}{20}$ が

$$-3 < -\frac{120-r}{20} < -\frac{1}{3}$$

を満たすことである．よって,

$$\overset{サ}{\boxed{60}} < r < \overset{シ}{\boxed{\frac{340}{3}}} .$$

(3) P が最小となるときの x , y , z が正であることが条件であり，これは ③ の境界線の交点 $\left(\dfrac{28-3s}{16},\ \dfrac{s-4}{16}\right)$ が $x>0$, $y>0$, $x+y<1$ の範囲にあることと同値である．よって,

$$\frac{28-3s}{16}>0 \text{ かつ } \frac{s-4}{16}>0 \text{ かつ } \frac{24-2s}{16}<1 .$$

$$\overset{ス}{\boxed{4}} < s < \overset{セ}{\boxed{\frac{28}{3}}} .$$

III

4 枚のカードから 2 枚選ぶ方法は ${}_4\mathrm{C}_2 = 6$ 通りあり，これらは同様に確からしい．

〔1〕 白 2 枚，黒 2 枚の状態から，

- 白 1 枚と黒 1 枚を選んで (${}_2\mathrm{C}_1 \cdot {}_2\mathrm{C}_1 = 4$ 通り) 裏返すと，再び白 2 枚，黒 2 枚の状態となる．
- 黒 2 枚を選んで (${}_2\mathrm{C}_2 = 1$ 通り) 裏返すと，すべて白の状態となる．
- 白 2 枚を選んで (${}_2\mathrm{C}_2 = 1$ 通り) 裏返すと，すべて黒の状態となる．

よって，

$$a_1 = \frac{4}{6} = \boldsymbol{\frac{2}{3}}\ , \quad b_1 = c_1 = \boldsymbol{\frac{1}{6}}\ . \qquad \cdots(\text{答})$$

〔2〕 すべて白の状態からは，どの 2 枚を選んで裏返しても必ず白 2 枚，黒 2 枚の状態となる．

同じく，すべて黒の状態からは，どの 2 枚を選んで裏返しても必ず白 2 枚，黒 2 枚の状態となる．

このことと (1) から，

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{2}{3}a_n + b_n + c_n\ , & \cdots(*) \\ b_{n+1} = \dfrac{1}{6}a_n\ , \\ c_{n+1} = \dfrac{1}{6}a_n\ . \end{cases}$$

よって，

$$a_2 = \frac{2}{3}a_1 + b_1 + c_1 = \boldsymbol{\frac{7}{9}}\ , \qquad \cdots(\text{答})$$

$$b_2 = c_2 = \frac{1}{6}a_1 = \boldsymbol{\frac{1}{9}}\ . \qquad \cdots(\text{答})$$

〔3〕 全事象の確率

$$a_n + b_n + c_n = 1$$

であるから，(∗) より

$$a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + (1 - a_n)\ .$$

$$a_{n+1} = \boldsymbol{-\frac{1}{3}a_n + 1}\ . \qquad \cdots(\text{答})$$

〔4〕〔3〕で得た漸化式を変形すると，

$$a_{n+1} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{3}\left(a_n - \frac{3}{4}\right)\ .$$

よって，数列 $\left\{a_n - \dfrac{3}{4}\right\}$ は

初項 $a_1 - \dfrac{3}{4} = -\dfrac{1}{12}$ ，　公比 $-\dfrac{1}{3}$

の等比数列となるから，

$$a_n - \frac{3}{4} = -\frac{1}{12}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\ .$$

$$a_n = \boldsymbol{\frac{1}{4}\left\{3 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}}\ . \qquad \cdots(\text{答})$$