I

[1]　x を p で割った商が q, 余りが r であるので, $x=pq+r$. つまり,

$$x^2=(pq+r)^2=\boxed{p^2q^2+2pqr+r^2}^{ア}.$$

二項定理から,

$$\begin{aligned} x^n &= (pq+r)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k\cdot(pq)^{n-k}\cdot r^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k \boxed{p^{n-k}q^{n-k}}^{イ} r^k \\ &= p(p^{n-1}q^n+\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}qr^{n-1})+r^n. \end{aligned}$$

$p^{n-1}q^n+\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}qr^{n-1}$ は整数であるので, x^n を p で割った余りは $\boxed{r^n}^{ウ}$ を p で割った余りに等しい.

また, 自然数 i, j について x^i を p で割った余りが s, x^j を p で割った余りが t であるとき, それぞれの商を A, B とすれば,

$$x^i=pA+s,\ x^j=pB+t.$$

つまり,

$$\begin{aligned} x^{i+j} &= x^i\cdot x^j=(pA+s)(pB+t) \\ &= p\cdot(pAB+At+Bs)+st. \end{aligned}$$

$pAB+At+Bs$ は整数であるので, x^{i+j} を p で割った余りは $\boxed{st}^{エ}$ を p で割った余りに等しい.

[2]　[1] の結果を利用する.

$31=7\cdot4+3$ であるので, 31 を 7 で割った余りは 3. ゆえに 31^n を 7 で割った余りは 3^n を 7 で割った余りに等しい. ここで,

$$3^2=7\cdot1+2.$$
$$3^3=3^2\cdot3,\quad \to 2\cdot3=6.$$
$$3^4=3^3\cdot3,\quad \to 6\cdot3=7\cdot2+4.$$
$$3^5=3^4\cdot3,\quad \to 4\cdot3=7+5.$$
$$3^6=3^5\cdot3,\quad \to 5\cdot3=7\cdot2+1.$$

つまり 31^2 を 7 で割った余りは $\boxed{2}^{オ}$, 31^3 を 7 で割った余りは $\boxed{6}^{カ}$.

また, 3^6 を 7 で割った余りが 1 より, m を自然数として, $3^{6(m-1)}$ を 7 で割った余りは 1. つまり,

$$3^{6m-5},\ 3^{6m-4},\ 3^{6m-3},\ 3^{6m-2},\ 3^{6m-1},\ 3^{6m}$$

を 7 で割った余りは $3,\ 3^2,\ 3^3,\ 3^4,\ 3^5,\ 3^6$ を 7 で割った余りと等しく, 3, 2, 6, 4, 5, 1. つまり,

$$31^{6m-5},\ 31^{6m-4},\ 31^{6m-3},\ 31^{6m-2},\ 31^{6m-1},\ 31^{6m}$$

を 7 で割った余りは 3, 2, 6, 4, 5, 1.

ゆえに自然数 k に対して 31^k を 7 で割った余りが 1 となる条件は, k が $\boxed{6}^{キ}$ の倍数であること.

同様に考えて, $31=11\cdot2+9$ であるので, 31 を 11 で割った余りは 9. ゆえに 31^n を 11 で割った余りは 9^n を 11 で割った余りに等しい. ここで,

$$9^2=11\cdot7+4.$$
$$9^3=9^2\cdot9,\quad \to 4\cdot9=11\cdot3+3.$$
$$9^4=9^3\cdot9,\quad \to 3\cdot9=11\cdot2+5.$$
$$9^5=9^4\cdot9,\quad \to 5\cdot9=11\cdot4+1.$$

ゆえに 9^5 を 11 で割った余りが 1 より, m を自然数として, $9^{5(m-1)}$ を 11 で割った余りは 1. つまり,

$$9^{5m-4},\ 9^{5m-3},\ 9^{5m-2},\ 9^{5m-1},\ 9^{5m}$$

を 11 で割った余りは $9,\ 9^2,\ 9^3,\ 9^4,\ 9^5$ を 11 で割った余りと等しく, 9, 4, 3, 5, 1. つまり,

$$31^{5m-4},\ 31^{5m-3},\ 31^{5m-2},\ 31^{5m-1},\ 31^{5m}$$

を 11 で割った余りは 9, 4, 3, 5, 1.

ゆえに自然数 k に対して 31^k を 11 で割った余りが 1 となる条件は, k が $\boxed{5}^{ク}$ の倍数であること.

以上の議論から, 自然数 k に対して 31^k を 7 で割った余りと 11 で割った余りがともに 4 となるのは, m_1, m_2 を自然数として

$$k=6m_1-2=5m_2-3$$

のときである. このとき,

$$6m_1-5m_2=-1.$$
$$6(m_1-4)=5(m_2-5).$$

5 と 6 は互いに素であるので, l を自然数として,

$$\begin{cases} m_1-4=5(l-1), \\ m_2-5=6(l-1). \end{cases}$$

I

つまり，

$$\begin{cases} m_1 = 5l - 1, \\ m_2 = 6l - 1. \end{cases}$$

ゆえに自然数 k の条件は l を自然数として，

$$k = 6(5l - 1) - 2 = 30l - 8.$$

のときである．これを満たす自然数 l で最小のものは $l = 1$ のときで，

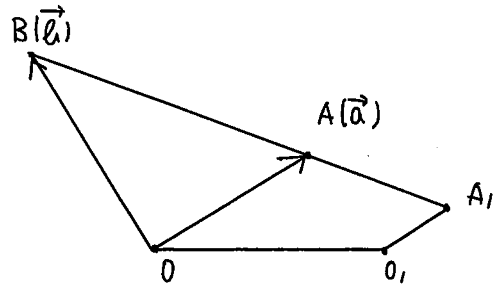
$$30 \cdot 1 - 8 = \boxed{22}^{\text{ケ}}.$$

５番目に小さいものは $l = 5$ のときで，

$$30 \cdot 5 - 8 = \boxed{142}^{\text{コ}}.$$

Ⅱ

[1]



点A_1は線分ABを$p^2:(1+p^2)$に外分するから,

$$\overrightarrow{OA_1}=\frac{-(1+p^2)\overrightarrow{OA}+p^2\overrightarrow{OB}}{p^2-(1+p^2)}=\boxed{(1+p^2)\vec{a}-p^2\vec{b}}^{ア}.$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{O_1A}&=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OO_1}\\&=\vec{a}-(\overrightarrow{OA_1}-p^2\vec{a})\\&=\vec{a}-\{(1+p^2)\vec{a}-p^2\vec{b}-p^2\vec{a}\}\\&=\boxed{p^2\vec{b}}^{イ}.\end{aligned}$$

よって,

$AB:A_1A=OB:O_1A=1:p^2$,

$\angle ABO=\angle A_1AO_1$

であるから

$\triangle OAB \backsim \triangle O_1A_1A$. 相似比は $1:p^2$ である)…(*)

から$\triangle O_1A_1A$の面積は$\triangle OAB$の面積の

$(p^2)^2=\boxed{p^4}^{ウ}$ 倍.

[2] $\overrightarrow{OO_1}=\overrightarrow{OA_1}-p^2\vec{a}$ より,

$\overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{OO_1}=p^2\vec{a}$.

$\overrightarrow{O_1A_1}=p^2\vec{a}$

$\overrightarrow{O_1O_2}=\overrightarrow{O_1A_2}-p^2\overrightarrow{O_1A_1}$ より 同様に

$\overrightarrow{O_2A_2}=p^2\overrightarrow{O_1A_1}=p^4\vec{a}$.

これより,

$\overrightarrow{OA_2}-\overrightarrow{OO_2}=p^4\vec{a}$.

$\overrightarrow{OO_2}=\overrightarrow{OA_2}-p^4\vec{a}$. …①

また,[1]と同様に考えると,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA_2}&=(1+p^2)\overrightarrow{OA_1}-p^2\overrightarrow{OA}\\&=(1+p^2)\{(1+p^2)\vec{a}-p^2\vec{b}\}-p^2\vec{a}.\end{aligned}$$

①に代入して,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OO_2}&=\{(1+p^2)^2-p^2-p^4\}\vec{a}-p^2(1+p^2)\vec{b}\\&=\boxed{(1+p^2)\vec{a}-p^2(1+p^2)\vec{b}}^{エ}.\end{aligned}$$

一方,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OO_1}&=\overrightarrow{OA_1}-p^2\vec{a}\\&=(1+p^2)\vec{a}-p^2\vec{b}-p^2\vec{a}\\&=\vec{a}-p^2\vec{b}\quad\cdots②\end{aligned}$$

であるから,

$\overrightarrow{OO_2}=(1+p^2)\overrightarrow{OO_1}$.

O, O_1, O_2は同一直線上にあることがわかる.

この操作を続けると,

$\triangle O_{n-1}A_{n-1}A_{n-2} \backsim \triangle O_nA_nA_{n-1}$ $(n=3,4,\cdots)$

(相似比 $1:p^2$ であり), $A_0=A$ とすると,

$|\overrightarrow{A_nA_{n-1}}|=(p^2)^n|\overrightarrow{AB}|$ $(n=1,2,\cdots)$

また,同様に, $O_0=O$ とすると,

$O_{n-1}A_{n-1}:O_nA_n=A_{n-1}O_n:A_nO_{n+1}=1:p^2$,

$\angle O_{n-1}A_{n-1}O_n=\angle O_nA_nA_{n+1}$

より,

$\triangle O_{n-1}A_{n-1}O_n \backsim \triangle O_nA_nO_{n+1}$ $(n=1,2,3,\cdots)$

(相似比 $1:p^2$) であるから.

$|O_nO_{n+1}|=(p^2)^n|\overrightarrow{OO_1}|$ $(n=1,2,3,\cdots)$.

さらに, $\lim\limits_{n\to\infty}|\overrightarrow{A_nD}|=\lim\limits_{n\to\infty}|\overrightarrow{O_nD}|=0$ と $0<p^2<1$ より

$$|\overrightarrow{BD}|=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}(p^2)^n|\overrightarrow{AB}|=\boxed{\frac{1}{1-p^2}}^{オ}|\overrightarrow{AB}|$$

$$|\overrightarrow{OD}|=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}(p^2)^n|\overrightarrow{OO_1}|=\boxed{\frac{1}{1-p^2}}^{カ}|\overrightarrow{OO_1}|$$

Ⅱ

[3] $\angle AOB = 90^\circ$ より $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

Eは直線AB上にあるから，tを実数として，

$$\overrightarrow{OE}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$$

とおく．Dは直線OO_1上にあるから

$$OD \parallel OO_1.$$

よって，

$$\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{OO_1}=0 \quad \cdots③$$

を満たすtの値を求める．

$|\vec{a}|=p$，$|\vec{b}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ も考慮すると，

$$\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{OO_1}=\{(1-t)\vec{a}+t\vec{b}\}(\vec{a}-p^2\vec{b}) \quad (②より)$$

$$=p^2(1-t)-p^2t$$

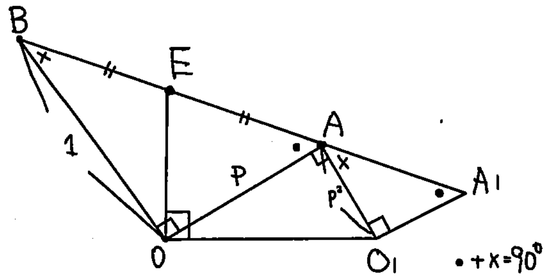
これと③より

$$p^2(1-2t)=0.$$

$$t=\frac{1}{2}. \quad (p^2\neq 0 より)$$

ゆえに

$$\overrightarrow{OE}=\boxed{\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}}^{\,キ}.$$



(※) より $O_1A=p^2OB=1$

また，三角形OAO_1において，$\angle OAO_1=90^\circ$であるから

$$|\overrightarrow{OO_1}|=p\sqrt{p^2+1}=p|\overrightarrow{AB}|.$$

よって，

$$|\overrightarrow{OD}|=\frac{1}{1-p^2}|\overrightarrow{OO_1}|=\frac{p}{1-p^2}|\overrightarrow{AB}|$$

一方

$$|\overrightarrow{ED}|=|\overrightarrow{BD}|-|\overrightarrow{BE}|$$

$$=\frac{1}{1-p^2}|\overrightarrow{AB}|-\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|$$

$$=\frac{1+p^2}{2(1-p^2)}|\overrightarrow{AB}|.$$

以上より，

$$\frac{|\overrightarrow{OD}|}{|\overrightarrow{ED}|}=\frac{\frac{p}{1-p^2}|\overrightarrow{AB}|}{\frac{1+p^2}{2(1-p^2)}|\overrightarrow{AB}|}=\boxed{\frac{2p}{1+p^2}}^{\,ク}.$$

Ⅲ

$f(x)=(x^2+a)e^{-x}$.　(aは実数の定数)

[1]　$a=0$のとき

$f(x)=x^2e^{-x}$.

$f'(x)=(2x-x^2)e^{-x}$

$=-x(x-2)e^{-x}$.

$f(x)$の増減は次のようになる.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$

よって，$x=\boxed{0}^{ア}$ で極小値，

$x=\boxed{2}^{イ}$ で極大値　をとる.

$\int_0^2 f'(x)dx=[f(x)]_0^2$

$=f(2)-f(0)$

$=\boxed{4e^{-2}}^{ウ}$.

[2]　$f'(x)=\{2x-(x^2+a)\}e^{-x}$

$=-(x^2-2x+a)e^{-x}$. …①

$e^{-x}\neq0$より，求める条件は，

$x^2-2x+a=0$…②が異なる2つの実数解をもつことである.②の判別式をDとおくと，

$\frac{D}{4}=1-a>0$.

これより求める条件は，

$\boxed{a<1}^{エ}$.

また，このとき，

$f''(x)=-\{2x-2-(x^2-2x+a)\}e^{-x}$

$=(x^2-4x+a+2)e^{-x}$

$=\{x-(2+\sqrt{2-a})\}\{x-(2-\sqrt{2-a})\}e^{-x}$

$f'(x)$の増減は次のようになる.

x	$\cdots$	$2-\sqrt{2-a}$	$\cdots$	$2+\sqrt{2-a}$	$\cdots$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

また，

$f'(2-\sqrt{2-a})=-\{(2-\sqrt{2-a})^2-2(2-\sqrt{2-a})+a\}e^{-(2-\sqrt{2-a})}$

$=-(6-a-4\sqrt{2-a}-4+2\sqrt{2-a}+a)e^{-2+\sqrt{2-a}}$

$=2(\sqrt{2-a}-1)e^{-2+\sqrt{2-a}}>0$.（$a<1$より）

十分大きいxに対して，

$f'(x)=-(x^2-2x+a)e^{-x}<0$

であるから，$f'(x)$は，$x=\boxed{2-\sqrt{2-a}}^{オ}$

で最大値をとる.

[3]　条件より，

$$\begin{cases} g'(x)=f(x). & \cdots③ \\ g(x)e^x=h(x) & \cdots④ \end{cases}$$
（$h(x)$はxの多項式）

④より

$g(x)=h(x)e^{-x}$.

$g'(x)=(h'(x)-h(x))e^{-x}$.

これと③より，

$(h'(x)-h(x))e^{-x}=f(x)$.

$h'(x)-h(x)=x^2+a$. …⑤（$e^{-x}\neq0$より）

右辺はxの2次式であるから，左辺も2次式.

また，$h(x)$が定数でないとき，

（$h'(x)$の次数）<（$h(x)$の次数）に注意すると，

$h(x)=sx^2+tx+u$（s,t,uは実数）

とおけ，

$h'(x)=2sx+t$.

これより⑤は，

$-sx^2+(2s-t)x+(t-u)=x^2+a$.

これはxの恒等式であるから，

Ⅲ

$-s=1,\ 2s-t=0,\ t-u=a.$

よって,

$$s=-1,\ t=-2,\ u=-2-a$$

であるから,

$$g(x)=h(x)e^{-x}=-(x^2+2x+a+2)e^{-x} \cdots ⑥$$

$$g(x)=\int_0^x f(t)dt \cdots ⑦$$

が成立するのは

$$g(0)=\int_0^0 f(t)dx=0$$

のときであるが,⑥より

$$g(0)=-(2+a)$$

であるから,⑦が成立するのは,

$$2+a=0.$$

$$a=\boxed{-2}^{カ}$$

のときである.

$g(x)=0$ が異なる2つの実数解をもつ条件は,⑥より,$x^2+2x+a+2=0 \cdots ⑧$ が異なる2つの実数解をもつことと同値である.よって.

$$(⑧の判別式)/4=1-(2+a)>0.$$

これより,求める条件は,

$$\boxed{a<-1}^{キ}.$$

①より $f'(x)\geqq 0$ となる x の範囲は,

$$1-\sqrt{1-a}\leqq x\leqq 1+\sqrt{1-a}.$$

⑥より $g(x)\geqq 0$ となる x の範囲は,

$$-1-\sqrt{-1-a}\leqq x\leqq -1+\sqrt{-1-a}.$$

$$\alpha=1-\sqrt{1-a},\quad \beta=1+\sqrt{1-a},$$

$$\gamma=-1-\sqrt{-1-a},\quad \delta=-1+\sqrt{-1-a}$$

とおく.

$$S_1=\int_\alpha^\beta f'(x)dx=f(\beta)-f(\alpha).$$

⑥の導出と同様の考え方で $g(x)$ の原始関数の1つを求めると

$$G(x)=(x^2+4x+a+6)e^{-x}.$$

よって

$$S_2=\int_\gamma^\delta g(x)dx=G(\delta)-G(\gamma).$$

α,β は②の解,γ,δ は⑧の解であり,

$$x^2+a=(x^2-2x+a)+2x$$

$$x^2+4x+a+6=(x^2+2x+a+2)+2(x+2)$$

であることに注意すると,

$$\frac{S_2}{S_1}=\frac{G(\delta)-G(\gamma)}{f(\beta)-f(\alpha)}$$

$$=\frac{2\{(\delta+2)e^{-\delta}-(\gamma+2)e^{-\gamma}\}}{2(\beta e^{-\beta}-\alpha e^{-\alpha})}$$

$$=\frac{(\delta+2)e^{\gamma-\delta}-(\gamma+2)}{\beta e^{\alpha-\beta}-\alpha}\cdot\frac{e^{\alpha}}{e^{\gamma}}$$

$$=\frac{\left(\frac{\delta}{\alpha}+\frac{2}{\alpha}\right)e^{\gamma-\delta}-\left(\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{2}{\alpha}\right)}{\frac{\beta}{\alpha}\cdot e^{\alpha-\beta}-1}\cdot e^{\alpha-\gamma} \cdots ⑨$$

ここで,$a\to-\infty$ のとき

$$\alpha\to-\infty,$$

$$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{1+\sqrt{1-a}}{1-\sqrt{1-a}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{-a}}+\sqrt{-\frac{1}{a}+1}}{\frac{1}{\sqrt{-a}}-\sqrt{-\frac{1}{a}+1}}\to-1$$

同様に

$$\frac{\gamma}{\alpha}\to 1,\quad \frac{\delta}{\alpha}\to-1.$$

また,

$$\alpha-\beta=-2\sqrt{1-a}\to-\infty$$

$$\gamma-\delta=-2\sqrt{-1-a}\to-\infty$$

$$\alpha-\gamma=2+(\sqrt{-1-a}-\sqrt{1-a})$$

$$=2-\frac{2}{\sqrt{-1-a}+\sqrt{1-a}}\to 2$$

であるから,$\displaystyle\lim_{a\to-\infty}\frac{S_2}{S_1}$ は収束し,その値は,⑨より,

$$\frac{0-1}{0-1}\cdot e^2=\boxed{e^2}^{ク}.$$

IV

$$a_n = \begin{cases} X_1 & (n=1), \\ a_{n-1} - \dfrac{1}{n}(a_{n-1} - X_n) & (n \geqq 2). \end{cases} \quad \cdots\cdots①$$

[1]　①で $n=2, 3$ として,

$$a_2 = a_1 - \frac{1}{2}(a_1 - X_2) = \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}X_2$$

$$= \boxed{\frac{X_1 + X_2}{2}}^{ア},$$

$$a_3 = a_2 - \frac{1}{3}(a_2 - X_3) = \frac{2}{3}a_2 + \frac{1}{3}X_3$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{X_1 + X_2}{2} + \frac{1}{3}X_3$$

$$= \boxed{\frac{X_1 + X_2 + X_3}{3}}^{イ}.$$

①より $n \geqq 1$ で,

$$a_{n+1} = a_n - \frac{1}{n+1}(a_n - X_{n+1}).$$

$$(n+1)a_{n+1} = na_n + X_{n+1}.$$

ここで $b_n = na_n$ とすると,

$$b_{n+1} = b_n + X_{n+1}. \quad \cdots\cdots②$$

ゆえに $(p, q) = \boxed{(1, 1)}^{ウ}$.

②より $n \geqq 2$ において,

$$b_n = 1 \cdot a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} X_{k+1}.$$

$$na_n = X_1 + \sum_{k=2}^{n} X_k = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

これは $n=1$ のときも成り立つので, $n \geqq 1$ で,

$$a_n = \boxed{\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)}^{エ}.$$

[2]　各 n について $X_n = 1$ となるのは1回コインを投げて表が出る場合であり, その確率は $\boxed{\dfrac{1}{2}}^{オ}$.

$a_2 = \dfrac{X_1 + X_2}{2} = 1$ のとき, $X_1 + X_2 = 2$.

つまり2回コインを投げて2回とも表であればよく,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \boxed{\frac{1}{4}}^{カ}.$$

$a_3 = \dfrac{X_1 + X_2 + X_3}{3} = 0$ のとき,

$$X_1 + X_2 + X_3 = 0.$$

3回コインを投げて3回とも裏であればよく,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \boxed{\frac{1}{8}}^{キ}.$$

$a_8 \leqq \dfrac{1}{4}$ のとき, $X_1 + X_2 + \cdots + X_8 \leqq 2$.

つまり8回コインを投げて表が2回以下であればよい. 表が出る回数で場合分けを実行して求める確率は,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^8 + {}_8\mathrm{C}_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 + {}_8\mathrm{C}_2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6$$

$$= \frac{1+8+28}{2^8} = \boxed{\frac{37}{256}}^{ク}.$$

n が奇数のとき, m を自然数として $n = 2m-1$ とする. $a_{2m-1} \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき,

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_{2m-1} \leqq \frac{2m-1}{2}.$$

つまり $2m-1$ 回コインを投げて表が $m-1$ 回以下であればよい. 表が出る回数で場合分けを実行して求める確率は,

$$\sum_{k=0}^{m-1} {}_{2m-1}\mathrm{C}_k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{(2m-1)-k}$$

$$= \frac{1}{2^{2m-1}} \cdot \sum_{k=0}^{m-1} {}_{2m-1}\mathrm{C}_k$$

$$= \frac{1}{2^{2m-1}} \cdot \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{2}({}_{2m-1}\mathrm{C}_k + {}_{2m-1}\mathrm{C}_{2m-1-k})$$

$$= \frac{1}{2^{2m}} \cdot \{({}_{2m-1}\mathrm{C}_0 + {}_{2m-1}\mathrm{C}_{2m-1}) + ({}_{2m-1}\mathrm{C}_1 + {}_{2m-1}\mathrm{C}_{2m-2}) + \cdots + ({}_{2m-1}\mathrm{C}_{m-1} + {}_{2m-1}\mathrm{C}_m)\}$$

$$= \frac{1}{2^{2m}} \cdot ({}_{2m-1}\mathrm{C}_0 + \cdots + {}_{2m-1}\mathrm{C}_{2m-1})$$

$$= \frac{1}{2^{2m}} \cdot (1+1)^{2m-1} = \boxed{\frac{1}{2}}^{ケ}.$$

IV

[3]　$a_n=0$ のとき，

$$X_1+X_2+\cdots+X_n=0.$$

n 回コインを投げて n 回とも裏であればよく，

$$\boxed{(1-p)^n}^{コ}.$$

n を2以上の自然数として，$na_n=2$ のとき，

$$X_1+X_2+\cdots+X_n=2.$$

つまり n 回コインを投げて表が2回，裏が $n-2$ 回であればよい．この確率 $Q(p)$ は，

$$Q(p)={}_n\mathrm{C}_2\,p^2(1-p)^{n-2}.$$

$n=2$ のとき，

$$Q(p)=p^2$$

は $p=1$ で最大値をとる．

$n\geqq 3$ のとき，$0\leqq p\leqq 1$ において

$$\begin{aligned}Q'(p)&={}_n\mathrm{C}_2\cdot\{2p\cdot(1-p)^{n-2}\\&\qquad-p^2\cdot(n-2)(1-p)^{n-3}\}\\&={}_n\mathrm{C}_2\,p(1-p)^{n-3}\{2(1-p)-(n-2)p\}\\&={}_n\mathrm{C}_2\,np(1-p)^{n-3}\cdot\left(\frac{2}{n}-p\right).\end{aligned}$$

$Q(p)$ の増減は以下のようになる．

p	0	$\cdots$	$\frac{2}{n}$	$\cdots$	1
$Q'(p)$		$+$	0	$-$	
$Q(p)$		$\nearrow$	最大	$\searrow$	

ゆえに $Q(p)$ は $p=\dfrac{2}{n}$ のとき最大値をとる．

以上より $na_n=2$ となる確率が最も高くなるのは，

$p=\boxed{\dfrac{2}{n}}^{サ}$ のときである．