理学部、医学部、工学部、農学部、情報学部（自然情報学科、コンピュータ科学科）

1

(1) $f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{2}{\sqrt{x}}\ (x>0)$ より,

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x\sqrt{x}}=\frac{x-2}{2x\sqrt{x}}.$$

よって, $f(x)\ (x>0)$ の増減は次のようになる.

x	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	$2\sqrt{2}$	$\nearrow$

表より, $f(x)$ は
極小値 $2\sqrt{2}$ をもち, 極大値をもたない. …(答)

(2) C 上の点 $(s, f(s))\ (s>0)$ における C の接線は,

$$y=\frac{s-2}{2s\sqrt{s}}(x-s)+\sqrt{s}+\frac{2}{\sqrt{s}}.$$

これが $P(t, 0)$ を通るとき,

$$0=\frac{s-2}{2s\sqrt{s}}(t-s)+\sqrt{s}+\frac{2}{\sqrt{s}}.$$

$$0=(s-2)(t-s)+2s^2+4s.$$

$$s^2+(t+6)s-2t=0. \cdots ①$$

s の方程式①の正の解の個数と P を通る C の接線の本数は一致するので, 求めるものは,

「s の方程式①が異なる2つの正の解をもつ」…(*)

ような t の値の範囲である.

$$g(s)=s^2+(t+6)s-2t$$

とおくと,

$$g(s)=\left(s+\frac{t+6}{2}\right)^2-\frac{t^2+20t+36}{4}$$

より, (*)を満たす条件は,

$$\begin{cases} -\dfrac{t+6}{2}>0, \\ g\left(-\dfrac{t+6}{2}\right)=-\dfrac{t^2+20t+36}{4}<0, \\ g(0)=-2t>0, \end{cases}$$

すなわち,

$$\begin{cases} t<-6, \\ t<-18,\ -2<t, \\ t<0. \end{cases}$$

よって求める t の値の範囲は,

$t<-18$. …(答)

(3) ①の2解が α, β であるから, 解と係数の関係より,

$$\begin{cases} \alpha+\beta=-t-6, & \cdots ② \\ \alpha\beta=-2t. & \cdots ③ \end{cases}$$

②より, $t=-\alpha-\beta-6$.
これを③に代入して

$$\alpha\beta=-2(-\alpha-\beta-6).$$

$$(\alpha-2)(\beta-2)=16.$$

$-2<\alpha-2<\beta-2$ であり, α, β が整数であることから

$$(\alpha-2, \beta-2)=(1, 16), (2, 8).$$

よって求める組は

$(\alpha, \beta)=(3, 18), (4, 10)$ …(答)

理学部、医学部、工学部、農学部、情報学部（自然情報学科、コンピュータ科学科）

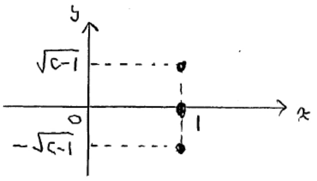
2

(1) $P(z) = z^3 - 3z^2 + (c+2)z - c$

$= (z-1)(z^2 - 2z + c)$ $(c>1)$

より，$P(z)=0$ を満たす z は，

$z = 1,\ 1 \pm \sqrt{c-1}\,i$. …(答)



…(答)

(2) $Q(z) = -\alpha^7 z^3 + 3\alpha^6 z^2 + (c+2)\alpha z - c$

において，$\alpha z = u$ とおくと，

$Q(z) = -\alpha^4 u^3 + 3\alpha^4 u^2 + (c+2)u - c$.

ここで，

$\alpha = \frac{1-i}{\sqrt{2}} = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ より

$\alpha^4 = \cos(-\pi) + i\sin(-\pi) = -1$

であるから，

$Q(z) = u^3 - 3u^2 + (c+2)u - c = P(u)$.

よって，$Q(z)=0$ を満たす u は，(1)より

$u = 1,\ 1 \pm \sqrt{c-1}\,i$

であり，z は

$z = \alpha^{-1}u = \alpha^{-1},\ \alpha^{-1}(1 \pm \sqrt{c-1}\,i)$. つまり

$z = \frac{1+i}{\sqrt{2}},\ \frac{1 \pm \sqrt{c-1}}{\sqrt{2}} + \frac{1 \mp \sqrt{c-1}}{\sqrt{2}}i$.

(複号同順)

このうち，実部が最大のものは

$\frac{1+\sqrt{c-1}}{\sqrt{2}} + \frac{1-\sqrt{c-1}}{\sqrt{2}}i$. …(答)

(3) $Q(z)=0$ の3解を

$\gamma_1 = \frac{1+\sqrt{c-1}}{\sqrt{2}} + \frac{1-\sqrt{c-1}}{\sqrt{2}}i$,

$\gamma_2 = \frac{1-\sqrt{c-1}}{\sqrt{2}} + \frac{1+\sqrt{c-1}}{\sqrt{2}}i$,

$\gamma_3 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ とおく。

γ_2, γ_3 の虚部は正なので，$P(z)=0$ と共通解 1 をもつのは $\gamma_1 = 1$ のときに限る。

このとき，$\begin{cases} \frac{1+\sqrt{c-1}}{\sqrt{2}} = 1 \\ \frac{1-\sqrt{c-1}}{\sqrt{2}} = 0 \end{cases}$ であるが，

これらを満たす実数 c は存在しない。

γ_2, γ_3 の実部は $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 以下なので，

$P(z)=0$ と共通解 $1+\sqrt{c-1}\,i$ または

$1-\sqrt{c-1}\,i$ をもつのは，

(i) $\gamma_1 = 1+\sqrt{c-1}\,i$，または

(ii) $\gamma_1 = 1-\sqrt{c-1}\,i$ のときに限る。

(i), (ii) ともに，実部について

$\frac{1+\sqrt{c-1}}{\sqrt{2}} = 1$ より $\sqrt{c-1} = \sqrt{2}-1$

であり，$c = 4 - 2\sqrt{2}$.

このとき，γ_1 の虚部は

$\frac{1-\sqrt{c-1}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1$ より

(i)のときが適する。

以上より，$c = 4 - 2\sqrt{2}$ …(答)

であり，共通解 β は

$\beta = 1 + (\sqrt{2}-1)i$. …(答)

理学部、医学部、工学部、農学部、情報学部（自然情報学科、コンピュータ科学科）

3

(1) $\overrightarrow{AB}=(1,1,-1)$, $\overrightarrow{AC}=(1,-1,-2)$ であるから，

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=1^2+1^2+(-1)^2=3$. …(答)

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}=1^2+(-1)^2+(-2)^2=6$. …(答)

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1\times1+1\times(-1)+(-1)\times(-2)=2$. …(答)

(2) Qは平面H上にあるから，

$\overrightarrow{AQ}=p\overrightarrow{AB}+q\overrightarrow{AC}$ …①

と表せる．$OQ\perp H$ より，

$\begin{cases}OQ\perp AB,\\ OQ\perp AC\end{cases}$ すなわち，$\begin{cases}\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{AB}=0, & \cdots②\\ \overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{AC}=0. & \cdots③\end{cases}$

①，②より

$(\overrightarrow{OA}+p\overrightarrow{AB}+q\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AB}=0$.

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}+p|\overrightarrow{AB}|^2+q\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$.

$3\times1+1\times1+3\times(-1)+3p+2q=0$.

$3p+2q=-1$. …④

①，③より，

$(\overrightarrow{OA}+p\overrightarrow{AB}+q\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AC}=0$.

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AC}+p\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+q|\overrightarrow{AC}|^2=0$.

$3\times1+1\times(-1)+3\times(-2)+2p+6q=0$.

$p+3q=2$. …⑤

④，⑤より，$p=-1$，$q=1$.

よって①より，$\overrightarrow{AQ}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$. …(答)

(3) 領域Kは平面H上に存在する．

R_1を直線QP上の点とすると，

$\overrightarrow{AR_1}=\overrightarrow{AQ}+k\overrightarrow{QP}$

$=(ks+k-1)\overrightarrow{AB}+(kt-k+1)\overrightarrow{AC}$.

さらにR_1が直線AC上にあるとき，

$\overrightarrow{AR_1}=l\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AB}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{AB}\not\parallel\overrightarrow{AC}$ より，

$\begin{cases}ks+k-1=0,\\ kt-k+1=l.\end{cases}$

これより $k=\dfrac{1}{1+s}$，$l=\dfrac{s+t}{1+s}$.

したがって，$r=\dfrac{s+t}{1+s}$ とおくと $r\geqq0$ であり，また $s\geqq0$ より $0<k\leqq1$ であるから，R_1は線分QP上にある．

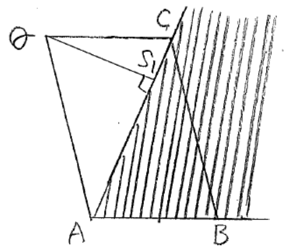
このR_1をRとすれば，線分QP上の点で $\overrightarrow{AR}=r\overrightarrow{AC}$（$r$は非負の実数）を満たす点Rが存在するといえる．

（証明終り）

(4) $OQ\perp H$ より，K上の点Pに対して

$OP=\sqrt{OQ^2+QP^2}$ が成り立つ．

OQは一定であるから，OPが最小となるのはQPが最小のときである．(2)より $\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{BC}$ であるから，Qの位置は次図のようになり，Kは次図の斜線部分（境界含む）である．



Qから直線ACに下ろした垂線と直線ACとの交点をS_1とする．

$QS_1\perp AC$ より $\overrightarrow{QS_1}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ であるから，$\overrightarrow{AS_1}=u\overrightarrow{AC}$ とおくと，(2)より

$(u\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AC}=0$.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+(u-1)|\overrightarrow{AC}|^2=0$.

$2+(u-1)\times6=0$. これより $u=\dfrac{2}{3}$.

よって，$\overrightarrow{AS_1}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ であるから，S_1は領域K上の点である．したがって，OPが最小となるのは，PがS_1と一致するときで，このときのPがSである．

$\overrightarrow{OS_1}=\overrightarrow{OA}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}=\left(\dfrac{11}{3},\dfrac{1}{3},\dfrac{5}{3}\right)$ より

$S\left(\dfrac{11}{3},\dfrac{1}{3},\dfrac{5}{3}\right)$. …(答)

理学部、医学部、工学部、農学部、情報学部（自然情報学科、コンピュータ科学科）

4

(1) $f(1) = 1-(1-p)^n$ …(答)

$f(2) = f(1) - {}_nC_1\, p(1-p)^{n-1}$

$= 1-(1-p)^n - np(1-p)^{n-1}$ …(答)

(2) $n \geqq 2$ のとき，

$k=1, 2, \cdots, n-1$ に対し，

$f(k+1) = f(k) - {}_nC_k\, p^k(1-p)^{n-k}$ …①

ここで，$k=1, 2, \cdots, n$ に対して

$$f(k) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\int_0^p x^{k-1}(1-x)^{n-k}\,dx \quad \cdots(*)$$

が成り立つことを数学的帰納法により証明する．

(I) $k=1$ のとき

$$f(1) = \frac{n!}{0!(n-1)!}\int_0^p x^0(1-x)^{n-1}\,dx$$

$$= n\int_0^p (1-x)^{n-1}dx = n\left[-\frac{1}{n}(1-x)^n\right]_0^p$$

$$= 1-(1-p)^n$$

となり，$k=1$ のとき，(*) は成り立つ．

(II) $k=m\ (m=1, 2, \cdots, n-1)$ のとき

(*) が成り立つと仮定する．このとき

$$f(m) = \frac{n!}{(m-1)!(n-m)!}\int_0^p x^{m-1}(1-x)^{n-m}\,dx \quad \cdots(**)$$

となる．①と(**)より，

$$f(m+1) = f(m) - {}_nC_m\, p^m(1-p)^{n-m}$$

$$= \frac{n!}{(m-1)!(n-m)!}\int_0^p x^{m-1}(1-x)^{n-m}dx - {}_nC_m\, p^m(1-p)^{n-m}$$

$$= \frac{n!}{(m-1)!(n-m)!}\left\{\left[\frac{1}{m}x^m(1-x)^{n-m}\right]_0^p + \int_0^p \frac{1}{m}x^m\cdot(n-m)(1-x)^{n-m-1}dx\right\} - {}_nC_m\, p^m(1-p)^{n-m}$$

$$= \frac{n!}{m!(n-m)!}p^m(1-p)^{n-m} + \frac{n!}{m!(n-m-1)!}\int_0^p x^m(1-x)^{n-m-1}dx - \frac{n!}{m!(n-m)!}p^m(1-p)^{n-m}$$

$$= \frac{n!}{m!(n-m-1)!}\int_0^p x^m(1-x)^{n-m-1}dx$$

となり，$k=m+1$ のときも(*)は成り立つ．

したがって，(I)，(II) より $k=1, 2, \cdots, n$ に対して (*) は成り立つ．

((*) は $n=1$ のときも成り立つ)(証明終り)

(3) (2)で示した式において，k を $k+1$，n を $2k+1$，p を $\frac{1}{2}$ にすると，

$$f(k+1) = \frac{(2k+1)!}{k!\,k!}\int_0^{\frac{1}{2}} x^k(1-x)^k\,dx$$

ここで，$p=\frac{1}{2}$ のとき，試行を $2k+1$ 回行って赤玉を $k+1$ 回以上取り出す事象と，白玉を $k+1$ 回以上取り出す，即ち，赤玉を取り出す回数が k 回以下である事象は同程度に起こるから，

$$f(k+1) = \frac{(2k+1)!}{k!\,k!}\int_0^{\frac{1}{2}} x^k(1-x)^k\,dx = \frac{1}{2}$$

よって，

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^k(1-x)^k\,dx = \frac{(k!)^2}{2\cdot(2k+1)!} \quad \cdots(答)$$