15	数学 数学Ⅰ，数学A 数学Ⅱ，数学B 数学Ⅲ

令和6年度入学試験問題

解答紙

（5枚のうち1枚目）

受験番号

受験番号

15

解答はこの線より上の部分に書いてはいけません。

〔1〕(50点)

〔1〕の採点

(1) $\overrightarrow{PQ}=(2,0,2)$, $\overrightarrow{PR}=(a+1,a^2-1,a^3+1)$.

背理法により示す.

3点P, Q, Rが一直線上にあると仮定すると, $\overrightarrow{PR}=k\overrightarrow{PQ}$ を満たす実数 k が存在する. $\overrightarrow{PR}$ と $k\overrightarrow{PQ}$ の成分を比較して,

$$a+1=2k\cdots①,\quad a^2-1=0\cdots②,\quad a^3+1=2k\cdots③$$

②より, $a=\pm1$ となるが, これは, $a\neq-1$, $a\neq1$ に矛盾する.

よって, 3点P, Q, Rは一直線上にない.

(2) $|\overrightarrow{PQ}|^2=2^2+0^2+2^2=8$,

$$|\overrightarrow{PR}|^2=(a+1)^2\{1+(a-1)^2+(a^2-a+1)^2\}$$
$$=(a+1)^2(a^4-2a^3+4a^2-4a+3),$$

$$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}=2(a+1)+0+2(a^3+1)=2(a+1)(a^2-a+2).$$

よって, 三角形PQRの面積を S とすると,

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{PQ}|^2\cdot|\overrightarrow{PR}|^2-(\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR})^2}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{8(a+1)^2(a^4-2a^3+4a^2-4a+3)-4(a+1)^2(a^2-a+2)^2}$$
$$=\sqrt{(1-a^2)^2(a^2+2)}.$$

ここで, $a^2=t$ とおくと, $0\leqq t<1$ であり,

$f(t)=(1-t)^2(t+2)$ とすると, $f'(t)=-3(1-t)(1+t)$.

よって, $0\leqq t<1$ における $f(t)$ の増減は次のとおり.

t	0	$\cdots$	(1)
$f'(t)$		$-$	
$f(t)$	2	↘	(0)

$f(t)$ は $t=0$ で最大値2をとる.

したがって, $S=\sqrt{f(t)}$ は $a=0$ のとき最大となり,

最大値は,

$$\sqrt{2}.\quad\cdots(答)$$

【2】(50点)

【2】の採点

(1) $f(z)=0$ から $(z^2+1)(z^4+1)=0$ より $z^2=-1$ …① または, $z^4=-1$ …②

① のとき, $|z^2|=|-1|$ から $|z|^2=1$ より, $|z|=1$

② のとき, $|z^4|=|-1|$ から $|z|^4=1$ より, $|z|=1$

よって, $f(z)=0$ をみたすすべての複素数 z に対して, $|z|=1$ が成り立つ

(2) 条件と(1)で示したことより, $|wz|=1$ であるから, これと $|z|=1$ より $|w|=1$

ゆえに, $w=\cos\alpha+i\sin\alpha$ $(0\leqq\alpha<2\pi)$ とおける.

ここで, ①を解くと, $(z+i)(z-i)=0$ より, $z=\pm i$ であり, ②を解くと, $(z^2-\sqrt{2}z+1)(z^2+\sqrt{2}z+1)=0$ より, $z=\dfrac{\sqrt{2}\pm\sqrt{2}i}{2}, \dfrac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{2}i}{2}$

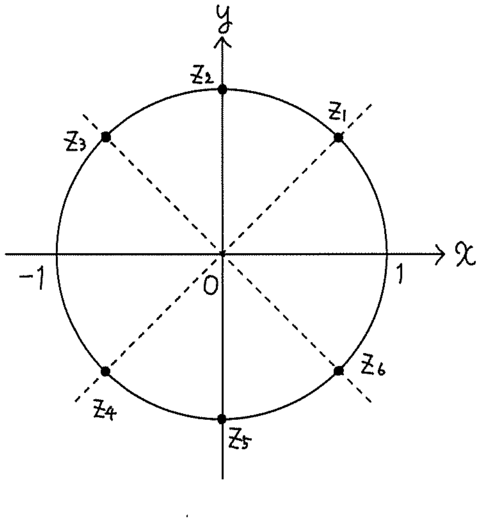
よって, $f(z)=0$ の解を極形式で表すと,

$$z=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4},\ \cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2},\ \cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi$$

$$\cos\frac{5}{4}\pi+i\sin\frac{5}{4}\pi,\ \cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3}{2}\pi,\ \cos\frac{7}{4}\pi+i\sin\frac{7}{4}\pi$$

これらを偏角が小さい方から順に, $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6$ とおく.

まず, 3点 z_1, z_2, z_3 をいずれも 0 のまわりに α だけ回転したときに, z_1 から z_6 のいずれかと重なることを考えると, $\alpha=0, \pi$ が必要



$\alpha=0$ のとき, すなわち, $w=1$ のとき

$f(wz_k)=f(z_k)=0$ $(k=1,2,3,4,5,6)$ が成り立つ

$\alpha=\pi$ のとき, すなわち, $w=-1$ のとき

$f(wz_k)=f(-z_k)=0$ が成り立つ

よって, $w=1, -1$ …(答)

解答紙

（５枚のうち３枚目）

〔３〕（50点）

〔３〕の採点

(1) $\dfrac{b!}{a!} - b = \dfrac{b! - a! \cdot b}{a!}$

$= \dfrac{b\{(b-1)! - a!\}}{a!}$

ここで，$a < b$ より $a \leqq b-1$ から，

$a! \leqq (b-1)!$

したがって，

$\dfrac{b!}{a!} - b \geqq 0$ すなわち $\dfrac{b!}{a!} \geqq b$ …①

よって，示された．

(2) $2 \cdot a! = b!$ …②

より

$2 = \dfrac{b!}{a!}$ …③

(ア) $a < b$ のとき ①，③ より，

$2 \geqq b$

よって，② をみたす組 (a, b) は，

$(a, b) = (1, 2)$

(イ) $a = b$ のとき

② より $2 = 1$ となり不適

(ウ) $a > b$ のとき

(1) より，

$\dfrac{a!}{b!} \geqq a$

このとき，③ より

$\dfrac{a!}{b!} = \dfrac{1}{2} \geqq a$

となり不適

したがって，(ア)〜(ウ) より，求める自然数の組 (a, b) は，

$(a, b) = (1, 2)$ …（答）

(3) $a! + b! = 2c!$ …④

・$a < b$ のとき

$2a! < a! + b! < 2b!$

$a! < c! < b!$ （④より）

よって，

$a < c < b$

このとき，④ より

$2 = \dfrac{a!}{c!} + \dfrac{b!}{c!} \geqq \dfrac{a!}{c!} + b > b$

（b, c について，(1) と同様にして）

$b = 1$ となり不適

・$a > b$ のとき同様に不適

・$a = b$ のとき

④ より，

$2a! = 2c!$ より $a = c$

したがって，

$a = b = c$

したがって，求める自然数の組 (a, b, c) は，

$(a, b, c) = (n, n, n)$ …（答）

（n は自然数）

18	数学	数学Ⅰ，数学A 数学Ⅱ，数学B 数学Ⅲ

令和6年度入学試験問題

解 答 紙

（5枚のうち4枚目）

受験番号

受験番号

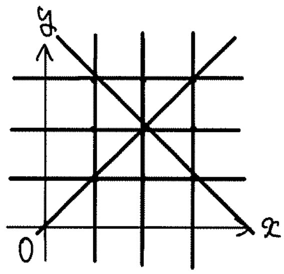
18

解答はこの線より上の部分に書いてはいけません。

〔4〕(50点)

〔4〕の採点

(1) $n=3$ のとき.

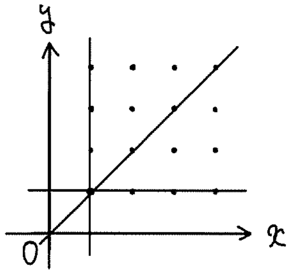


左図より,

$L(3)=8$ …(答)

以下, 条件を満たす直線を $l(n)$ と表し, $l(n)$ の方向ベクトルの1つを $\vec{d}$ とする

(2) $n=4$ のとき.



$\vec{d}=(0,1),(1,0)$ のとき, $l(4)$ は4個ずつ存在する.

$\vec{d}=(a,b)$ (a,b は互いに素な自然数) とする.

a,b の少なくとも1つが3以上のとき

$2\vec{d}$ の x 成分または y 成分は6以上となるから

4^2 個の格子点のうち, 3個以上を通る直線はない.

よって, $a\leqq 2$, $b\leqq 2$ である.

$\vec{d}=(1,1)$ のとき, $l(4)$ は3個存在する.

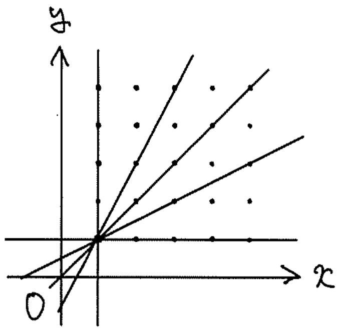
$\vec{d}=(1,2)$ のとき, $l(4)$ は存在しない.

$\vec{d}=(2,1)$ のとき, $l(4)$ は存在しない.

傾きが負のときも同様であるから,

$L(4)=4\times2+3\times2=14$ …(答)

(3) $n=5$ のとき.



$\vec{d}=(0,1),(1,0)$ のとき, $l(5)$ は5個ずつ存在する.

(2)と同様に, $\vec{d}=(a,b)$ (a,b は互いに素な自然数) とすると,

$a\leqq 2$, $b\leqq 2$ である.

$\vec{d}=(1,1)$ のとき, $l(5)$ は5個存在する.

$\vec{d}=(1,2)$ のとき, $l(5)$ は3個存在する.

$\vec{d}=(2,1)$ のとき, $l(5)$ は3個存在する.

傾きが負のときも同様であるから,

$L(5)=5\times2+(5+3+3)\times2=32$ …(答)

解 答 紙

解答はこの線より上の部分に書いてはいけません。

〔５〕（50点）

〔５〕の採点

(1) $I(m+1,\ n+1)$

$$= \int_1^e (e^x)' x^{m+1} (\log x)^{n+1} dx$$

$$= \left[e^x x^{m+1} (\log x)^{n+1} \right]_1^e - \int_1^e e^x \left\{ (m+1) x^m (\log x)^{n+1} + x^{m+1} \cdot (n+1)(\log x)^n \cdot \frac{1}{x} \right\} dx$$

（部分積分法より）

$$= e^e \cdot e^{m+1} - (m+1) \int_1^e e^x x^m (\log x)^{n+1} dx - (n+1) \int_1^e e^x x^m (\log x)^n dx$$

$$= e^e \cdot e^{m+1} - (m+1) I(m,\ n+1) - (n+1) I(m,\ n) \quad \cdots (答)$$

(2) $1 < x < e$ のとき $x^m e^x (\log x)^n > 0$ であるから，

$$I(m,\ n) > 0$$

よって，$I(m+1,\ n+1) > 0$ であるから，(1) より，

$$e^e e^{m+1} - (m+1) I(m,\ n+1) - (n+1) I(m,\ n) > 0$$

$$(m+1) I(m,\ n+1) + (n+1) I(m,\ n) < e^e e^{m+1}$$

$(m+1) I(m,\ n+1) > 0$ であるから，

$$(n+1) I(m,\ n) < (m+1) I(m,\ n+1) + (n+1) I(m,\ n)$$

であるので，

$$(n+1) I(m,\ n) < e^e e^{m+1}$$

よって，すべての自然数 $m,\ n$ に対して，

$$0 < I(m,\ n) < \frac{e^e e^{m+1}}{n+1}$$

が成り立ち，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{e^e e^{m+1}}{n+1} = 0$ であることとあわせて，

$$\lim_{n\to\infty} I(m,\ n) = 0$$

が成り立つ．