Ⅰ

$AB=2x+2,\ BC=3x-2,\ CA=5$

(1) 三角形の成立条件より，

$$\begin{cases}(2x+2)+(3x-2)>5,\\ 5+(2x+2)>3x-2,\\ (3x-2)+5>2x+2\end{cases}$$

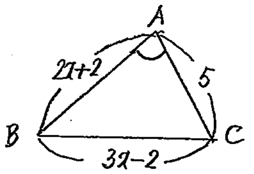
すなわち，

$$\begin{cases}x>1,\\ 9>x\\ x>-1\end{cases}$$

となるから，x のとり得る値の範囲は

$$1<x<9. \quad \cdots(答)$$

(2)



余弦定理より，

$$\cos A=\frac{(2x+2)^2+5^2-(3x-2)^2}{2(2x+2)\cdot 5}$$

$$=\frac{-5(x+1)(x-5)}{4\cdot 5(x+1)}$$

$$=\frac{5-x}{4}$$

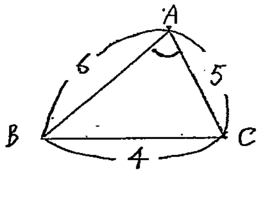
であるから，$\cos A=\frac{3}{4}$ のとき，

$$\frac{5-x}{4}=\frac{3}{4}$$

$$x=2. \quad \cdots(答)$$

（これは $1<x<9$ を満たしている．）

(3) $\cos A=\frac{3}{4}$ のとき，(2)の結果より次図を得る．



$0<A<\pi$ より，$\sin A>0$ であるから，

$$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}$$

$$=\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{7}}{4}.$$

$\triangle ABC$ の外接円の半径を R とすると，正弦定理より，

$$2R=\frac{BC}{\sin A}$$

であるから，

$$R=\frac{BC}{2\sin A}$$

$$=\frac{4}{2\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}}$$

$$=\frac{8}{\sqrt{7}}=\frac{8\sqrt{7}}{7}. \quad \cdots(答)$$

$\triangle ABC$ の内接円の半径を r とし，$\triangle ABC$ の面積に注目すると，

$$\frac{1}{2}r(4+5+6)=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 5\sin A$$

$$15r=30\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$r=\frac{\sqrt{7}}{2}. \quad \cdots(答)$$

（注）(1)において $2x+2>0,\ 3x-2>0$ が省略できる理由は，

$$\begin{cases}(2x+2)+(3x-2)>5,\\ 5+(2x+2)>3x-2\\ (3x-2)+5>2x+2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (2x+2)+5>3x-2>|(2x+2)-5|$$

$$\left((3x-2)+5>2x+2>|(3x-2)-5|\right)$$

であるから，波線部分のところで $2x+2>0$，$3x-2>0$ を満たす x も考えているからである．

2/3

$\boxed{\text{II}}$

$$z = a(2+\sqrt{3}i)^3 + b(2+\sqrt{3}i)^2 + 49$$
$$= a(8+12\sqrt{3}i-18-3\sqrt{3}i) + b(4+4\sqrt{3}i-3) + 49$$
$$= (-10a+b+49) + (9a+4b)\sqrt{3}i.$$

よって，z の実部は $\boxed{-10a+b+49}$ ①，虚部は $\sqrt{3}$ ($\boxed{9a+4b}$ ②).

$z=0$ となる条件は

$$\begin{cases} -10a+b+49=0 \\ 9a+4b=0 \end{cases}$$

であるから，$z=0$ となる a,b の値は

$$(a,b) = \boxed{(4,-9)}\ ③.$$

このとき

$$ax^3+bx^2+49$$
$$= 4x^3-9x^2+49$$
$$= (4x+\boxed{7}\ ④)(x^2-4x+7)$$

と因数分解できる．

$$(P(x) = x^2-4x+7)$$
$$Q(x) = x^5-4x^4+7x^3+x^2-2x+8$$
$$= (x^2-4x+7)(x^3+1)+2x+1$$
$$(= P(x)(x^3+1)+2x+1)$$

であるから，整式 $Q(x)$ を整式 $P(x)$ で割ったときの商は $\boxed{x^3+1}$ ⑤，余りは $\boxed{2x+1}$ ⑥.

さらに，$P(2+\sqrt{3}i)=0$ であるから

$$Q(2+\sqrt{3}i) = P(2+\sqrt{3}i)\{(2+\sqrt{3}i)^3+1\} + 2(2+\sqrt{3}i)+1$$
$$= 0 + (5+2\sqrt{3}i)$$
$$= \boxed{5+2\sqrt{3}i}\ ⑦.$$

Ⅲ

$C_1: y = x^2 + px + q$

$C_2: y = 1 - x^2$.

(1) C_1の頂点のx座標をtとするとき，条件よりこの頂点は直線$y = x$上にあるから，C_1の方程式は

$$y = (x-t)^2 + t$$
$$= x^2 - 2tx + t^2 + t$$

と表せる．よって，係数を比較して

$p = \boxed{-2t}$，$q = \boxed{t^2 + t}$．

(2) C_1とC_2が異なる2つの共有点をもつ条件は，xの方程式

$$x^2 - 2tx + t^2 + t = 1 - x^2$$

すなわち

$$2x^2 - 2tx + t^2 + t - 1 = 0 \quad \cdots \quad (*)$$

が異なる2つの実数解をもつことである．(＊)の判別式をDとおくと，$D > 0$であるから

$$\frac{D}{4} = t^2 - 2(t^2 + t - 1) > 0$$

$$t^2 + 2t - 2 < 0$$

より

$\boxed{-1-\sqrt{3} < t < -1+\sqrt{3}}$．

(3) (＊)の解をα，$\beta\ (\alpha < \beta)$とするとき

$$\alpha = \frac{t - \sqrt{\frac{D}{4}}}{2}, \quad \beta = \frac{t + \sqrt{\frac{D}{4}}}{2}$$

であるから

$$\beta - \alpha = \sqrt{\frac{D}{4}}$$

$= \boxed{\sqrt{-t^2 - 2t + 2}}$．

(4) $\beta - \alpha = \sqrt{-(t+1)^2 + 3}$

であり，$-1-\sqrt{3} < t < -1+\sqrt{3}$より$\beta - \alpha$は$t = \boxed{-1}$のときに最大値$\boxed{\sqrt{3}}$をとる．

(5) $t = -1$のとき

$$C_1: y = x^2 + 2x$$

であるから，$-1 \leqq x \leqq 0$においてC_1，C_2および直線$x = -1$とy軸で囲まれた部分の面積をSとすると

$$S = \int_{-1}^{0} \{(1 - x^2) - (x^2 + 2x)\}\,dx$$

$$= \int_{-1}^{0} (-2x^2 - 2x + 1)\,dx$$

$$= \left[-\frac{2}{3}x^3 - x^2 + x\right]_{-1}^{0}$$

$= \boxed{\frac{4}{3}}$．