I

(1) $\cos\alpha=2\sin 2\alpha$ より，

$$\cos\alpha=4\sin\alpha\cos\alpha.$$
$$\cos\alpha(1-4\sin\alpha)=0.$$

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ において $\cos\alpha\neq 0$ であるから，

$$\sin\alpha=\frac{1}{4}. \quad \cdots(\text{答})$$

$2\sin 2\beta=\tan\beta$ より，

$$4\sin\beta\cos\beta=\frac{\sin\beta}{\cos\beta}.$$
$$4\sin\beta\cos^2\beta=\sin\beta.$$
$$\sin\beta(2\cos\beta+1)(2\cos\beta-1)=0.$$

$0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ において $\sin\beta(2\cos\beta+1)\neq 0$ であるから，

$$\cos\beta=\frac{1}{2}$$

すなわち，

$$\beta=\frac{\pi}{3}.$$

よって，

$$\sin\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}. \quad \cdots(\text{答})$$

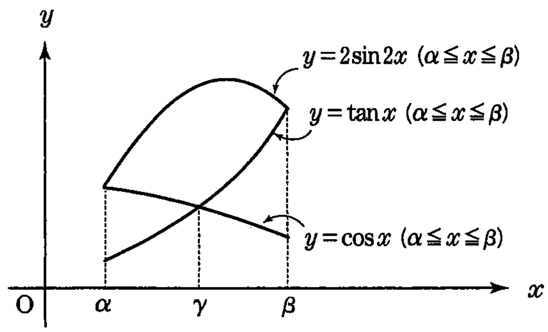
$\cos\gamma=\tan\gamma$ より，

$$\cos\gamma=\frac{\sin\gamma}{\cos\gamma}.$$
$$\cos^2\gamma=\sin\gamma. \quad \cdots(*)$$
$$\sin^2\gamma+\sin\gamma-1=0.$$

$0<\gamma<\dfrac{\pi}{2}$ において $0<\sin\gamma<1$ であるから，

$$\sin\gamma=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}. \quad \cdots(\text{答})$$

(2) グラフは次のようになる．



(3) (2) の 3 つの曲線で囲まれた部分の面積を S とすると，

$$S=\int_\alpha^\gamma(2\sin 2x-\cos x)dx+\int_\gamma^\beta(2\sin 2x-\tan x)dx$$
$$=\int_\alpha^\beta 2\sin 2x\,dx-\int_\alpha^\gamma\cos x\,dx-\int_\gamma^\beta\tan x\,dx.$$

ここで，

$$\int_\alpha^\beta 2\sin 2x\,dx=\Big[-\cos 2x\Big]_\alpha^\beta$$
$$=-\cos 2\beta+\cos 2\alpha$$
$$=-\cos\frac{2}{3}\pi+1-2\sin^2\alpha$$
$$=\frac{1}{2}+1-2\left(\frac{1}{4}\right)^2$$
$$=\frac{11}{8},$$

$$\int_\alpha^\gamma\cos x\,dx=\Big[\sin x\Big]_\alpha^\gamma$$
$$=\sin\gamma-\sin\alpha$$
$$=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{4}$$
$$=\frac{-3+2\sqrt{5}}{4},$$

$$\int_\gamma^\beta\tan x\,dx=-\int_\gamma^\beta\frac{(\cos x)'}{\cos x}dx$$
$$=-\Big[\log|\cos x|\Big]_\gamma^\beta$$
$$=-\log(\cos\beta)+\log(\cos\gamma)$$
$$=\log\frac{\cos\gamma}{\cos\beta}$$
$$=\frac{1}{2}\log\left(\frac{\cos\gamma}{\cos\beta}\right)^2$$
$$=\frac{1}{2}\log\frac{\sin\gamma}{\cos^2\frac{\pi}{3}} \quad ((*)より)$$
$$=\frac{1}{2}\log\Big(2\big(-1+\sqrt{5}\big)\Big).$$

よって，

$$S=\frac{11}{8}-\frac{-3+2\sqrt{5}}{4}-\frac{1}{2}\log\Big(2\big(\sqrt{5}-1\big)\Big)$$
$$=\underbrace{\boxed{\frac{17-4\sqrt{5}}{8}}}_{①}-\frac{1}{2}\log\Big(2\big(\underbrace{\boxed{\sqrt{5}-1}}_{②}\big)\Big).$$

Ⅱ

点zが2点A(α), B(β)を通る直線l上にあるとき，$\dfrac{z-\alpha}{\beta-\alpha}$が実数になることから，

$$\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}=\overline{\left(\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}\right)}.$$

$$\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{\overline{z}-\overline{\alpha}}{\overline{\beta}-\overline{\alpha}}.$$

$$(z-\alpha)(\overline{\beta}-\overline{\alpha})-(\overline{z}-\overline{\alpha})(\beta-\alpha)=0.$$

$$(\overline{\beta}-\overline{\alpha})z-(\underset{①}{\boxed{\beta-\alpha}})\overline{z}=\underset{②}{\boxed{\alpha\overline{\beta}-\overline{\alpha}\beta}}. \quad (1)$$

また，点zが原点Oを通り，lに垂直な直線m上にあるとき，$\dfrac{z}{\beta-\alpha}$が純虚数になることから，

$$\frac{z}{\beta-\alpha}+\overline{\left(\frac{z}{\beta-\alpha}\right)}=0.$$

$$\frac{z}{\beta-\alpha}+\frac{\overline{z}}{\overline{\beta}-\overline{\alpha}}=0.$$

$$(\overline{\beta}-\overline{\alpha})z+(\underset{①}{\boxed{\beta-\alpha}})\overline{z}=\underset{③}{\boxed{0}}. \quad (2)$$

lとmの交点は，(1)+(2)より，

$$2(\overline{\beta}-\overline{\alpha})z=\alpha\overline{\beta}-\overline{\alpha}\beta.$$

これより，$w=\dfrac{\boxed{\alpha\overline{\beta}-\overline{\alpha}\beta}\ ②}{\boxed{2(\overline{\beta}-\overline{\alpha})}\ ④}.$

点C(w)が線分AB上にあるための条件は$\dfrac{w-\alpha}{\beta-\alpha}$が実数であることに注意して，

$$0\leqq\frac{w-\alpha}{\beta-\alpha}\leqq1.$$

ここで，

$$\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{\dfrac{\alpha\overline{\beta}-\overline{\alpha}\beta}{2(\overline{\beta}-\overline{\alpha})}-\alpha}{\beta-\alpha}$$

$$=\frac{\alpha\overline{\beta}-\overline{\alpha}\beta-2\alpha(\overline{\beta}-\overline{\alpha})}{2|\beta-\alpha|^2}$$

$$=\frac{2|\alpha|^2-\alpha\overline{\beta}-\overline{\alpha}\beta}{2|\beta-\alpha|^2}$$

であるから，求める必要十分条件は，

$$0\leqq\frac{2|\alpha|^2-\alpha\overline{\beta}-\overline{\alpha}\beta}{2|\beta-\alpha|^2}\leqq1$$

すなわち，

$$2|\alpha|^2-2|\beta-\alpha|^2\leqq\underset{⑤}{\boxed{\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta}}\leqq2|\alpha|^2. \quad (3)$$

次に，$\alpha=a+bi$（a, bは少なくとも一方は0でない実数）とし，

$\{\beta\,|\,\beta$は不等式$|\beta-(a+bi)|\leqq|a+bi|$
　および(3)を満たす$\}\cup\{a+bi\}$

を満たすβについて考える．

まず，$|\beta-(a+bi)|\leqq|a+bi|$ すなわち$|\beta-\alpha|\leqq|\alpha|$ より点βの集合は点αを中心とする半径$|\alpha|$の円の内部または周である．

さらに，$\beta=x+yi$（x, yは実数）とおき，これと$\alpha=a+bi$を(3)に代入して整理すると，

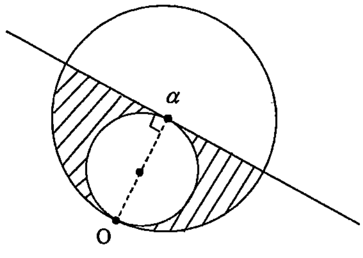
$$-x^2-y^2+2ax+2by\leqq ax+by\leqq a^2+b^2$$

すなわち，

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{b}{2}\right)^2\geqq\frac{a^2+b^2}{4}$$

かつ　$ax+by\leqq a^2+b^2.$

したがって，題意の図形は下図の斜線部分である（境界を含む）．

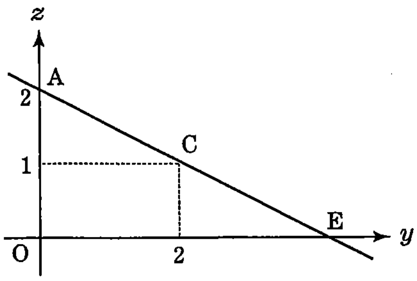


よって，求める面積は

$$\frac{(a^2+b^2)\pi}{2}-\frac{a^2+b^2}{4}\pi=\underset{⑥}{\boxed{\frac{a^2+b^2}{4}\pi}}.$$

Ⅲ

(1)　3点A，C，Eはいずれもyz平面上にある．



yz平面上において直線ACの方程式は，

$$z=-\frac{1}{2}y+2. \qquad \cdots①$$

この直線とy軸の交点がEであり，①で$z=0$とすると，

$y=4$.

よって，求めるEの座標は，

(0，4，0).　… (答)

(2)　条件より，

$$\overrightarrow{AB}=(1,\ 0,\ -1),\ \overrightarrow{AC}=(0,\ 2,\ -1). \qquad \cdots②$$

このとき，

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{2},\ |\overrightarrow{AC}|=\sqrt{5},\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1.$$

であるから，

$$\cos\angle BAC=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{10}}. \qquad \cdots (答)$$

すると，$\sin\angle BAC>0$より，

$$\sin\angle BAC=\sqrt{1-\cos^2\angle BAC}=\sqrt{1-\frac{1}{10}}=\frac{3}{\sqrt{10}}$$

であるから，△ABCの面積をSとすると，

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin\angle BAC=\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}=\frac{3}{2}. \qquad \cdots (答)$$

さらに，②より，

$$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{AC}$$

であるから，△ABCと△ADEは相似であり，その相似比は1:2である．

よって，△ADEの面積をTとすると，

$$T=2^2S=4\cdot\frac{3}{2}=6. \qquad \cdots (答)$$

(3)　条件より，

$$\overrightarrow{PH}=(x-1,\ y-2,\ z-1). \qquad \cdots③$$

このとき，$\overrightarrow{PH}\perp\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{PH}\perp\overrightarrow{AC}$より，

$$\begin{cases}\overrightarrow{PH}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\ \overrightarrow{PH}\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$$

であり，②，③より，

$$\begin{cases}x-z=0,\\ 2y-z-3=0.\end{cases}$$

よって，x，zをyを用いて表すと，

$x=z=2y-3$.　… (答)

すると，

H$(2y-3,\ y,\ 2y-3)$

より，

$$\overrightarrow{AH}=(2y-3,\ y,\ 2y-5). \qquad \cdots④$$

さらに，実数s，tを用いて，

$$\overrightarrow{AH}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$$

と表すとき，②，④より，

$$\begin{cases}2y-3=s,\\ y=2t,\\ 2y-5=-s-t.\end{cases}$$

これを解いて，

$$y=\frac{16}{9},\ s=\frac{5}{9},\ t=\frac{8}{9}. \qquad \cdots (答)$$

Ⅲ

(4)　直方体を平面 ABC で切った切り口は台形 BCED となり，その面積を U とすると，

$$U=(\triangle\mathrm{ADE}\text{の面積})-(\triangle\mathrm{ABC}\text{の面積})$$
$$=S-T$$
$$=\frac{9}{2}.$$

さらに，(3) より，

$$\overrightarrow{\mathrm{PH}}=\left(-\frac{4}{9},\ -\frac{2}{9},\ -\frac{4}{9}\right)$$
$$=\frac{2}{9}(-2,\ -1,\ -2)$$

であるから，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{PH}}\right|=\frac{2}{9}\sqrt{(-2)^2+(-1)^2+(-2)^2}$$
$$=\frac{2}{3}.$$

よって，求める体積を V とすると，

$$V=\frac{1}{3}\cdot U\cdot \mathrm{PH}$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{2}\cdot\frac{2}{3}$$
$$=1.\quad\cdots(\text{答})$$

Ⅳ

(1) $x^2+x-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}-6=0$ より，

$$\left(x-\frac{2}{x}\right)^2+4+\left(x-\frac{2}{x}\right)-6=0.$$

$x-\frac{2}{x}=t$ とおくと，

$$t^2+t-2=0.$$
$$(t-1)(t+2)=0.$$
$$t=1,\ -2.$$

$t=1$ のとき，$x-\frac{2}{x}=1$ より，

$$x^2-x-2=0.$$
$$(x-2)(x+1)=0.$$
$$x=2,\ -1.$$

$t=-2$ のとき，$x-\frac{2}{x}=-2$ より，

$$x^2+2x-2=0.$$
$$x=-1\pm\sqrt{3}.$$

よって，最小の解は，

$$x=\boxed{-1-\sqrt{3}}.$$ ①

(2) 余事象を考える．6回の試行で終了しないのはちょうど表が3回，裏が3回出るときであるから，求める確率は，

$$1-{}_6\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3=1-\frac{20}{2^6}$$
$$=\boxed{\frac{11}{16}}.$$ ②

(3)

$$S=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^3+\left(\frac{2}{n}\right)^3+\left(\frac{3}{n}\right)^3+\cdots+\left(\frac{4n-1}{n}\right)^3\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{4n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^3$$
$$=\int_0^4 x^3dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^4$$
$$=\boxed{64}.$$ ③

(4) $(x-1)(x-5)>0$ より，

$$x<1,\ 5<x.$$

$(x-3)(3x-a)<0$ より，

$$\begin{cases} a=9 \text{ のとき解なし,} \\ a>9 \text{ のとき } 3<x<\frac{a}{3}, \\ a<9 \text{ のとき } \frac{a}{3}<x<3. \end{cases}$$

したがって，求める条件は，

$a>9$ のとき，

$$7<\frac{a}{3}\leqq 8 \text{ より } 21<a\leqq 24.$$

$a<9$ のとき，

$$-2\leqq\frac{a}{3}<-1 \text{ より } -6\leqq a<-3.$$

よって，

a の最大値は $\boxed{24}$，④

最小値は $\boxed{-6}$．⑤

(5) n が6以上の自然数のとき，

$$\log_6 7\cdot\log_7 8\cdot\log_8 9\cdot\cdots\cdots\cdot\log_n(n+1)$$
$$=\frac{\log 7}{\log 6}\cdot\frac{\log 8}{\log 7}\cdot\frac{\log 9}{\log 8}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{\log(n+1)}{\log n}$$
$$=\frac{\log(n+1)}{\log 6}$$
$$=\log_6(n+1)$$

であるから，これが自然数となる n は，

$$n=\boxed{6}^m-1 \quad (m \text{ は2以上の自然数})$$ ⑥

である．

また，$a_m=6^m-1$ $(m\geqq 2)$ とおくと

$$a_{m+1}-a_m=5\cdot 6^m$$
$$=4\cdot 45\cdot 6^{m-2}$$

であるから，$a_{m+1}-a_m$ は4の倍数，すなわち a_{m+1} と a_m を4で割ったときの余りは一致する．このことと $a_2=35$ を4で割ったときの余りが3であることから，帰納的に求める余りは，

$$\boxed{3}.$$ ⑦