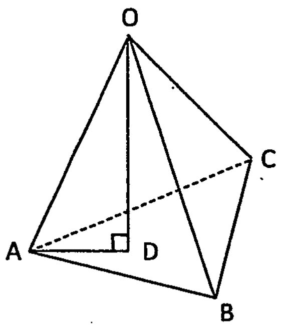
$\boxed{1}$

(1)




(i)

$\cos\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{1}{3}$ より,

$$\sin\angle\mathrm{BAC}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

よって，△ABC の面積を$S$とすると,

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cdot\sin\angle\mathrm{BAC}\\&=\frac{1}{2}\cdot3\cdot5\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}\\&=\boxed{5\sqrt{2}}_{ア}.\end{aligned}$$

次に，△ABC で余弦定理を用いて,

$$\begin{aligned}\mathrm{BC}^2&=\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2-2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cdot\cos\angle\mathrm{BAC}\\&=3^2+5^2-2\cdot3\cdot5\cdot\frac{1}{3}\\&=24.\end{aligned}$$

BC> 0 より,

$$\mathrm{BC}=2\sqrt{6}.$$

△ABC の外接円の半径を $R$ とおくと，△ABC で正弦定理を用いて,

$$\begin{aligned}2R&=\frac{\mathrm{BC}}{\sin\angle\mathrm{BAC}}\\&=\frac{2\sqrt{6}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}.\\&=3\sqrt{3}.\end{aligned}$$

よって，△ABC の外接円の直径は,

$$\boxed{3\sqrt{3}}_{イ}.$$

(ii)

O から平面 ABC に下した垂線の足を H とする. OA=OB=OC より,

$$\triangle\mathrm{OAH}\equiv\triangle\mathrm{OBH}\equiv\triangle\mathrm{OCH}.$$

ゆえに,

$$\mathrm{AH}=\mathrm{BH}=\mathrm{CH}.$$

したがって，点 H は△ABCの外心であるから点 H は点 D に一致する.

よって，△OAD で三平方の定理を用いて,

$$\begin{aligned}\mathrm{OD}&=\sqrt{\mathrm{OA}^2-\mathrm{AD}^2}\\&=\sqrt{3^2-R^2}\\&=\sqrt{9-\frac{27}{4}}\\&=\boxed{\frac{3}{2}}_{ウ}.\end{aligned}$$

さらに，四面体 OABC の体積を$V$とすると,

$$\begin{aligned}V&=\frac{1}{3}S\cdot\mathrm{OD}\\&=\frac{1}{3}\cdot5\sqrt{2}\cdot\frac{3}{2}\\&=\boxed{\frac{5\sqrt{2}}{2}}_{エ}.\end{aligned}$$

$\boxed{1}$

(2)

6枚のカードが入った袋から同時に3枚のカードを取り出す方法は，

$${}_6\mathrm{C}_3=20(\text{通り}).$$

(i)

$X=0$となるのは取り出した3枚のカードが，

$$\boxed{1},\ \boxed{1},\ \boxed{1}$$

の1通りであるから，

$$P(X=0)=\boxed{\frac{1}{20}}_{\text{オ}}.$$

(ii)

$X=2$となるのは取り出した3枚のカードが，

$$\boxed{1},\ \boxed{1},\ \boxed{3}$$

または，

$$\boxed{1},\ \boxed{2},\ \boxed{3}$$

の2つの場合があるから，

$$P(X=2)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{20}+\frac{3\cdot2}{20}$$

$$=\boxed{\frac{9}{20}}_{\text{カ}}.$$

(iii)

$X$のとり得る値は0，1，2であるから，

$$P(X=1)=1-\left(\frac{1}{20}+\frac{9}{20}\right)$$

$$=\frac{10}{20}.$$

また，$X=1$かつ$\boxed{1}$のカードを取り出すのは，取り出した3枚のカードが，

$$\boxed{1},\ \boxed{1},\ \boxed{2}$$

または，

$$\boxed{1},\ \boxed{2},\ \boxed{2}$$

の2つの場合があるから，その確率は，

$$\frac{{}_3\mathrm{C}_2\cdot2}{20}+\frac{3}{20}=\frac{9}{20}.$$

よって，求める確率は，

$$\frac{\frac{9}{20}}{\frac{10}{20}}=\boxed{\frac{9}{10}}_{\text{キ}}.$$

# 2

(1)

$$x^3-(a-3)x^2-(2a-1)x+3a+3=0. \cdots ①$$

(i)

①より，

$$-(x^2+2x-3)a+x^3+3x^2+x+3=0.$$
$$-(x+3)(x-1)a+(x+3)(x^2+1)=0.$$

これを$a$の恒等式と考えて，

$$\begin{cases}-(x+3)(x-1)=0,\\(x+3)(x^2+1)=0.\end{cases}$$

したがって，

$$x=-3.$$

よって，①は$a$の値にかかわらず$x=\boxed{-3}_{ア}$を解にもつ．

さらに，

$$(①の左辺)=(x+3)(x^2-ax+a+1)$$

より，①の左辺を$x+3$で割ったときの商は，

$$\boxed{x^2-ax+a+1}_{イ}.$$

(ii)

①が虚数解$\alpha$，$\beta$をもつとき，

$$x^2-ax+a+1=0 \quad \cdots ②$$

が，異なる2つの虚数解をもつから，②の判別式を$D$とすると，$D<0$.

$$D=a^2-4(a+1)=a^2-4a-4$$

より，

$$a^2-4a-4<0.$$

よって，

$$\boxed{2-2\sqrt{2}<a<2+2\sqrt{2}}_{ウ}. \quad \cdots ③$$

このとき，②の解と係数の関係より，

$$\alpha+\beta=a,\ \alpha\beta=a+1$$

であるから，

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2&=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\\&=a^2-2(a+1)\\&=(a-1)^2-3.\end{aligned}$$

よって，③より，$\alpha^2+\beta^2$の最小値は$a=1$のとき，

$$\boxed{-3}_{エ}.$$

(2)

(i)

等差数列$\{a_n\}$の公差を$d$とすると，

$$2a_2+a_4=6$$

より，

$$2(-3+d)-3+3d=6.$$
$$d=3.$$

よって，

$$a_n=-3+3(n-1)=\boxed{3n-6}_{オ}.$$

次に，$3m-6$ ($m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$) と表される数のうち，一の位が5，すなわち

$$10l+5\ (l\text{は整数})$$

とも表される数を考える．

このとき，

$$3m-10l=11. \quad \cdots ①$$

また，

$$3\cdot(-3)-10\cdot(-2)=11. \quad \cdots ②$$

①−②より，

$$3(m+3)=10(l+2).$$

3と10は互いに素であるから，整数$n$を用いて，

$$m+3=10n$$

すなわち，

$$m=10n-3$$

と表せる．

$m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$より，対応する$n$の値も，

$$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

となる．以上より，

$$b_n=3(10n-3)-6=\boxed{30n-15}_{カ}.$$

(ii)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{20}b_{2k}&=\sum_{k=1}^{20}(60k-15)\\&=\frac{20}{2}(45+1185)\\&=\boxed{12300}_{キ}.\end{aligned}$$

4/4

# 3

$$f(x)=x(|x|-1).$$

(1)　$x \geqq 0$ において，

$$\begin{aligned} f(x) &= x(x-1) \\ &= x^2-x \\ &= \left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

よって，$f(x)$ は，

$$x=\frac{1}{2} \text{ のとき最小値 } -\frac{1}{4}$$

をとる．

$x \leqq 0$ において，

$$\begin{aligned} f(x) &= x(-x-1) \\ &= -x^2-x \\ &= -\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

よって，$f(x)$ は，

$$x=-\frac{1}{2} \text{ のとき最大値 } \frac{1}{4}$$

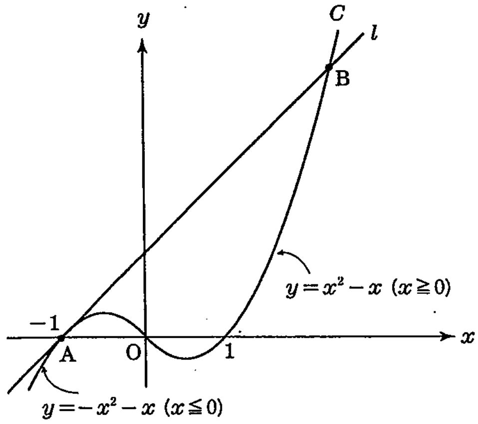
をとる．

以上より，

$$m=-\frac{1}{4},\quad M=\frac{1}{4}. \quad \cdots \text{(答)}$$

(2)
$$f(x)=\begin{cases} x^2-x & (x \geqq 0), \\ -x^2-x & (x \leqq 0) \end{cases}$$

であるから，グラフは次のようになる．




$x \leqq 0$ において，

$$f'(x)=-2x-1.$$

よって，曲線 $C$ 上の点 $\mathrm{A}(-1,\ f(-1))$ における接線 $l$ の方程式は，

$$y-f(-1)=f'(-1)(x+1)$$

すなわち，

$$y=x+1. \quad \cdots \text{(答)}$$

また，$y=x^2-x$ と $y=x+1$ の2式より $y$ を消去すると，

$$x^2-x=x+1$$

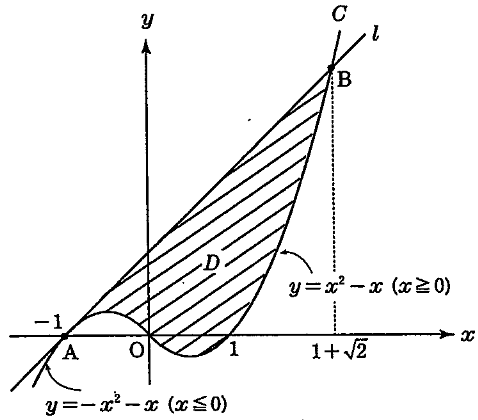
すなわち，

$$x^2-2x-1=0.$$

この2解のうち，$x \geqq 0$ を満たすものが点Bの $x$ 座標と一致するので，

$$x=1+\sqrt{2}. \quad \cdots \text{(答)}$$

(3)　$D$ は次図の斜線部分である．




したがって，

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{0} \{(x+1)-(-x^2-x)\}\,dx \\ &= \int_{-1}^{0} (x+1)^2\,dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x+1)^3\right]_{-1}^{0} \\ &= \frac{1}{3}. \quad \cdots \text{(答)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T &= \int_{0}^{1+\sqrt{2}} \{(x+1)-(x^2-x)\}\,dx \\ &= \int_{0}^{1+\sqrt{2}} \{-(x-1)^2+2\}\,dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}(x-1)^3+2x\right]_{0}^{1+\sqrt{2}} \\ &= -\frac{1}{3}\left\{(\sqrt{2})^3-(-1)^3\right\}+2(1+\sqrt{2}) \\ &= \frac{5+4\sqrt{2}}{3}. \quad \cdots \text{(答)} \end{aligned}$$