1

(1) $$\frac{6x}{x^3+8}=\frac{A}{x+2}+\frac{x+B}{x^2+Cx+4}$$

について，

$$6x(x^2+Cx+4)$$
$$=A(x^2-2x+4)(x^2+Cx+4)$$
$$+(x+B)(x^3+8). \quad \cdots\cdots ①$$

①が x についての恒等式となることが条件である．ここで，

(①の左辺)

$$=6x^3+6Cx^2+24x,$$

(①の右辺)

$$=A\{(x^2+4)^2+(C-2)x\cdot(x^2+4)-2Cx^2\}$$
$$+(x^4+Bx^3+8x+8B)$$
$$=A\{x^4+(C-2)x^3+(-2C+8)x^2$$
$$+(4C-8)x+16\}$$
$$+(x^4+Bx^3+8x+8B)$$
$$=(A+1)x^4+(AC-2A+B)x^3$$
$$+(-2AC+8A)x^2+(4AC-8A+8)x$$
$$+(16A+8B).$$

①の両辺の x の係数を比較して，

$$\begin{cases} A+1=0, \\ AC-2A+B=6, \\ -2AC+8A=6C, \\ 4AC-8A+8=24, \\ 16A+8B=0. \end{cases}$$

これらをすべて満たすのは，

$$A=\boxed{-1}^{ア},\ B=\boxed{2}^{イ},\ C=\boxed{-2}^{ウ}. \quad \cdots\cdots(答)$$

(2) 4枚のカードの取り出し方は ${}_9C_4=126$ 通りあり，これらは同様に確からしい．

(i) 4枚のカードに書かれた数字がすべて7以下である取り出し方は ${}_7C_4=35$ 通り．

ゆえに求める確率は，$\dfrac{35}{126}=\boxed{\dfrac{5}{18}}^{エ}$．　……(答)

(ii) 4枚のカードの中に8と書かれた数字がある取り出し方は，

$${}_1C_1\cdot{}_8C_3=56 \text{ 通り}.$$

ゆえに求める確率は，$\dfrac{56}{126}=\boxed{\dfrac{4}{9}}^{オ}$．　……(答)

(iii) 条件を満たす取り出し方における4枚のカードに書かれている数字の組合せは，

$\{1,2,3,4\},\{1,2,3,5\},\{1,2,3,6\},$
$\{1,2,4,5\}$

の4通りであるから，求める確率は，

$$\frac{4}{126}=\boxed{\frac{2}{63}}^{カ}. \quad \cdots\cdots(答)$$

(3) 等差数列 $\{a_n\}$ の初項を a，公差を d とすると，

$$a_3=a+2d=1 \quad かつ \quad a_8=a+7d=3.$$

これを解いて，$a=\dfrac{1}{5}$，$d=\boxed{\dfrac{2}{5}}^{キ}$．　……(答)

このとき，

$$a_n=\frac{1}{5}+\frac{2}{5}(n-1)=\boxed{\frac{2n-1}{5}}^{ク}, \quad \cdots\cdots(答)$$

また，

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{1}{2}n\cdot\left(\frac{1}{5}+\frac{2n-1}{5}\right)=\boxed{\frac{n^2}{5}}^{ケ}. \quad \cdots\cdots(答)$$

また，$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}ka_k$ について，

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}k\cdot\frac{2k-1}{5}=\frac{1}{5}\sum_{k=1}^{n}(2k^2-k)$$
$$=\frac{1}{5}\left\{2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{1}{2}n(n+1)\right\}$$
$$=\frac{1}{30}n(n+1)\{2(2n+1)-3\}$$
$$=\frac{1}{30}n(n+1)(4n-1).$$

ゆえに，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{30}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(4-\frac{1}{n}\right)$$
$$=\boxed{\frac{2}{15}}^{コ}. \quad \cdots\cdots(答)$$

$\boxed{2}$

(1)　$\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}$ であるので，

$$\begin{aligned}\sin\frac{\pi}{12}&=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\\&=\sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{3}\cdot\sin\frac{\pi}{4}\\&=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\\&=\boxed{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}^{\text{ア}},\quad\cdots\cdots\text{(答)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos\frac{\pi}{12}&=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\\&=\cos\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}\cdot\sin\frac{\pi}{4}\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\\&=\boxed{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}^{\text{イ}}.\quad\cdots\cdots\text{(答)}\end{aligned}$$

ここで，

$$\begin{aligned}\tan\theta\sin2\theta&=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot2\sin\theta\cos\theta=2\sin^2\theta\\&=\boxed{1-\cos2\theta}^{\text{ウ}}\quad\cdots\cdots\text{(答)}\end{aligned}$$

であり，$\theta=\dfrac{\pi}{24}$ とすると，

$$\tan\frac{\pi}{24}\cdot\sin\frac{\pi}{12}=1-\cos\frac{\pi}{12}.$$

つまり，

$$\begin{aligned}\tan\frac{\pi}{24}&=\frac{1-\cos\frac{\pi}{12}}{\sin\frac{\pi}{12}}\\&=\frac{1-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}=\frac{4-(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\\&=\frac{4(\sqrt{6}+\sqrt{2})-(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})}\\&=\boxed{\sqrt{6}+\sqrt{2}-\sqrt{3}-2}^{\text{エ}}.\quad\cdots\cdots\text{(答)}\end{aligned}$$

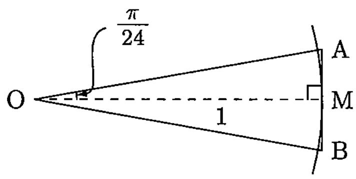
半径 1 の円に外接する正二十四角形 T について，ある隣り合う 2 つの頂点を A, B とする．円の中心 O から各頂点に線分を引くことで合同な 24 個の二等辺三角形に分割できる．OA = OB であるので，AB の中点を M とすると，

$$\angle\mathrm{AOM}=\angle\mathrm{BOM}=\frac{\pi}{24}.$$

OM ⊥ AB より M は円と AB の接点となるので，

$$\mathrm{OM}=1,$$

$$\mathrm{AB}=2\mathrm{AM}=2\cdot\mathrm{OM}\tan\frac{\pi}{24}=2\tan\frac{\pi}{24}.$$



ゆえに T の面積は，

$$\begin{aligned}&24\times\triangle\mathrm{OAB}\\&=24\cdot\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{OM}\\&=24\cdot\frac{1}{2}\cdot2\tan\frac{\pi}{24}\cdot1=24\tan\frac{\pi}{24}\\&=\boxed{24(\sqrt{6}+\sqrt{2}-\sqrt{3}-2)}^{\text{オ}}.\quad\cdots\cdots\text{(答)}\end{aligned}$$

(2)　$x=\cos\theta$ とおく．

(i)

$$\begin{aligned}\cos3\theta&=\cos(2\theta+\theta)\\&=\cos2\theta\cos\theta-\sin2\theta\sin\theta\\&=(2\cos^2\theta-1)\cos\theta-2\sin^2\theta\cos\theta\\&=(2x^2-1)x-2(1-x^2)x\\&=\boxed{4x^3-3x}^{\text{カ}}.\quad\cdots\cdots\text{(答)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin3\theta&=\sin(2\theta+\theta)\\&=\sin2\theta\cos\theta+\cos2\theta\sin\theta\\&=2\sin\theta\cos^2\theta+(2\cos^2\theta-1)\sin\theta\\&=2x^2\sin\theta+(2x^2-1)\sin\theta\\&=\left(\boxed{4x^2-1}^{\text{キ}}\right)\sin\theta.\quad\cdots\cdots\text{(答)}\end{aligned}$$

$\theta=\dfrac{2}{5}\pi$ とすると，

$$\cos3\theta=\cos(2\pi-2\theta)=\cos2\theta.$$

2

つまり，

$$4x^3-3x=2x^2-1.$$

$$4x^3-2x^2-3x+1=0.$$

$$(x-1)(4x^2+2x-1)=0.$$

$$x=1,\ \frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}.$$

$0<x=\cos\frac{2}{5}\pi<1$ であるので，

$$\cos\frac{2}{5}\pi=\boxed{\frac{\sqrt{5}-1}{4}}^{ク}.\quad\cdots\cdots(答)$$

(ii)　$5\theta=3\theta+2\theta$ および(i)の結果から，

$$\begin{aligned}&\cos 5\theta\\&=\cos(3\theta+2\theta)\\&=\cos 3\theta\cos 2\theta-\sin 3\theta\sin 2\theta\\&=(4x^3-3x)\cdot(2x^2-1)\\&\qquad-(4x^2-1)\sin\theta\cdot 2\sin\theta\cos\theta\\&=(8x^5-10x^3+3x)-2(4x^2-1)x\cdot(1-x^2)\\&=(8x^5-10x^3+3x)-2(-4x^5+5x^3-x)\\&=\boxed{16x^5-20x^3+5x}^{ケ}.\quad\cdots\cdots(答)\end{aligned}$$

$\theta=\frac{\pi}{10}$ とすると，$\cos 5\theta=\cos\frac{\pi}{2}=0.$

$x=\cos\frac{\pi}{10}\neq 0$ であるので，

$$16x^5-20x^3+5x=0.$$

$$16\cdot\left(x^2\right)^2-20\cdot x^2+5=0.$$

$$x^2=\frac{5\pm\sqrt{5}}{8}.$$

$0<\frac{\pi}{10}<\frac{\pi}{6}$ であるので，

$$\cos\frac{\pi}{10}>\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

ゆえに $x^2=\cos^2\frac{\pi}{10}>\frac{3}{4}$ となるから，

$$x^2=\cos^2\frac{\pi}{10}=\boxed{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}^{コ}.\quad\cdots\cdots(答)$$

3

(1)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ であるので，OA ⊥ OB．つまり，

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2}=\boxed{\sqrt{5}}^{\text{ア}}.\quad\cdots\cdots(答)$$

また，

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\vec{a}=\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{c}\right)-\vec{a}$$
$$=-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{c}$$

であるので，

$$|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2=\frac{4}{9}|\vec{a}|^2+\frac{1}{4}|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2-\frac{2}{3}\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{c}+\frac{4}{3}\vec{a}\cdot\vec{c}$$
$$=\frac{4}{9}+1+\frac{2}{9}-\frac{2}{3}=1.$$

ゆえに $|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|=\boxed{1}^{\text{イ}}$．……(答)

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(\vec{b}-\vec{a})\cdot\left(-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{c}\right)$$
$$=\frac{2}{3}|\vec{a}|^2+\frac{1}{2}|\vec{b}|^2-\frac{7}{6}\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{c}$$
$$=\frac{2}{3}+2-\frac{2}{3}=\boxed{2}^{\text{ウ}}.\quad\cdots\cdots(答)$$

以上から，

$$\triangle\mathrm{ABD}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}})^2}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{5\cdot1-2^2}=\boxed{\frac{1}{2}}^{\text{エ}}.\quad\cdots\cdots(答)$$

(2)　点 E は直線 AB 上にあるので，k を実数として

$$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}.$$

$\overrightarrow{\mathrm{DE}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ であるので，$\overrightarrow{\mathrm{DE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$．

$$\overrightarrow{\mathrm{DE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(\overrightarrow{\mathrm{AE}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$
$$=k|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$
$$=5k-2$$

であるから，$5k-2=0$．つまり $k=\dfrac{2}{5}$．

ゆえに $\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ となるので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\vec{a}+\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\vec{a}+\frac{2}{5}(\vec{b}-\vec{a})$$
$$=\boxed{\frac{3}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}}^{\text{オ}}.\quad\cdots\cdots(答)$$

点 E は線分 AB を $2:3=1:\boxed{\dfrac{3}{2}}^{\text{カ}}$ の比に内分する．

……(答)

(3)　点 F は平面 ABD 上にあるので，s,t を実数として，

$$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

とおける．OF ⊥ (平面 ABD) であるので，

$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{OF}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}},\\ \overrightarrow{\mathrm{OF}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AD}}.\end{cases}\quad つまり\quad\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{OF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0,\\ \overrightarrow{\mathrm{OF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=0.\end{cases}$$

$$\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=-1,$$
$$\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{a}\cdot\left(-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{c}\right)=-\frac{2}{3}$$

に注意して，

$$\begin{cases}(\vec{a}+\overrightarrow{\mathrm{AF}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0,\\ (\vec{a}+\overrightarrow{\mathrm{AF}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=0.\end{cases}$$

$$\begin{cases}s|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+t\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0,\\ s\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}+s|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2+\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=0.\end{cases}$$

$$\begin{cases}5s+2t-1=0,\\ 2s+t-\dfrac{2}{3}=0.\end{cases}$$

これを解いて，$s=\boxed{-\dfrac{1}{3}}^{\text{キ}}$，$t=\boxed{\dfrac{4}{3}}^{\text{ク}}$．……(答)

ゆえに $\overrightarrow{\mathrm{AF}}=-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ となるから，

$$|\overrightarrow{\mathrm{AF}}|^2=\frac{1}{9}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2-\frac{8}{9}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\frac{16}{9}|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2$$
$$=\frac{5}{9}-\frac{16}{9}+\frac{16}{9}=\frac{5}{9}.$$

AF ⊥ OF であるから三平方の定理より，

$$|\overrightarrow{\mathrm{OF}}|^2=|\vec{a}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{AF}}|^2=1-\frac{5}{9}=\frac{4}{9}.$$

ゆえに $|\overrightarrow{\mathrm{OF}}|=\boxed{\dfrac{2}{3}}^{\text{ケ}}$．……(答)

以上から四面体 OABD の体積は，

$$\frac{1}{3}\times\triangle\mathrm{ABD}\times|\overrightarrow{\mathrm{OF}}|$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\boxed{\frac{1}{9}}^{\text{コ}}.\quad\cdots\cdots(答)$$

4

(1)
$$h\left(\frac{1}{3}\right)=f\left(\frac{1}{3}\right)+g\left(\frac{1}{3}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\log\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\log\frac{2}{3}$$
$$=\frac{1}{3}\cdot(-\beta)+\frac{2}{3}\cdot(\alpha-\beta)$$
$$=\frac{2}{3}\alpha-\beta.\quad\cdots\cdots\text{(答)}$$

また,
$$h(x)-h(1-x)$$
$$=\{f(x)+g(x)\}-\{f(1-x)+g(1-x)\}$$
$$=f(x)+f(1-x)-f(1-x)-f(1-(1-x))$$
$$=f(x)+f(1-x)-f(1-x)-f(x)$$
$$=0.\quad\cdots\cdots\text{(答)}$$

(2) $f(x)=x\log x$ であり,
$$f'(x)=1\cdot\log x+x\cdot\frac{1}{x}=\log x+1.\quad\cdots\cdots\text{(答)}$$
$$g'(x)=(f(1-x))'=-f'(1-x)$$
であるので, $a=-1$.　……(答)

(3) (2)より
$$h'(x)=f'(x)+g'(x)=f'(x)-f'(1-x)$$
$$=\log x-\log(1-x).$$
$\log x$ と $\log(1-x)$ の大小, つまり x と $1-x$ の大小を考えて,
$$\begin{cases}0<x<\dfrac{1}{2}\text{のとき}, x<1-x.\\ \text{つまり}, h'(x)=\log x-\log(1-x)<0.\\ \dfrac{1}{2}<x<1\text{のとき}, x>1-x.\\ \text{つまり}, h'(x)=\log x-\log(1-x)>0.\end{cases}$$
$0<x<1$ における $h(x)$ の増減は以下のようになる.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	(1)
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		↘	極小	↗	

よって, $x=\dfrac{1}{2}$ のとき極小値
$$h\left(\frac{1}{2}\right)=2\cdot\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}=-\alpha.\quad\cdots\cdots\text{(答)}$$

(4)
$$\int f(x)\,dx=\int\left(\frac{1}{2}x^2\right)'\cdot\log x\,dx$$
$$=\frac{1}{2}x^2\log x-\int\frac{1}{2}x\,dx$$
$$=\frac{1}{2}x^2\log x-\frac{1}{4}x^2+C_1$$
(C_1は積分定数).

ゆえに条件を満たす関数 $F(x)$ の 1 つは
$$F(x)=\frac{1}{2}x^2\log x-\frac{1}{4}x^2.\quad\cdots\cdots\text{(答)}$$
また,
$$\int g(x)\,dx=\int f(1-x)\,dx$$
$$=-F(1-x)+C_2\ (C_2\text{は積分定数}).$$
ゆえに, $b=-1$.　……(答)

(5) (1)より $h\left(\dfrac{1}{3}\right)=h\left(\dfrac{2}{3}\right)$. また(3)の増減表より,

$0<x<1$ における $h(x)=h\left(\dfrac{1}{3}\right)$ の解は,

$x=\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{2}{3}$ に限られる. また, $\dfrac{1}{3}<x<\dfrac{2}{3}$ において, $h(x)<h\left(\dfrac{1}{3}\right)$. (4)より,
$$F\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{9}\log\frac{2}{3}-\frac{1}{9}=\frac{1}{9}(2\alpha-2\beta-1),$$
$$F\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{18}\log\frac{1}{3}-\frac{1}{36}=\frac{1}{36}(-2\beta-1).$$
つまり,
$$F\left(\frac{2}{3}\right)-F\left(\frac{1}{3}\right)$$
$$=\frac{1}{36}\{4(2\alpha-2\beta-1)-(-2\beta-1)\}$$
$$=\frac{1}{18}(4\alpha-3\beta)-\frac{1}{12}$$
に注意して, 求める面積 S は,
$$S=\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}\left\{h\left(\frac{1}{3}\right)-h(x)\right\}dx$$
$$=\frac{1}{3}h\left(\frac{1}{3}\right)-\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}\{f(x)+g(x)\}\,dx$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\alpha-\beta\right)-\Big[F(x)-F(1-x)\Big]_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}$$
$$=\frac{1}{9}(2\alpha-3\beta)-2\left\{F\left(\frac{2}{3}\right)-F\left(\frac{1}{3}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{9}(2\alpha-3\beta)-2\cdot\left\{\frac{1}{18}(4\alpha-3\beta)-\frac{1}{12}\right\}$$
$$=-\frac{2}{9}\alpha+\frac{1}{6}.\quad\cdots\cdots\text{(答)}$$