1

(1) $y=\dfrac{1}{3}x^3-10x$ について，

$$y'=x^2-10$$

であるから，y の $x\geqq 0$ における増減は次の通り．

x	0	$\cdots$	$\sqrt{10}$	$\cdots$
y'		$-$	0	$+$
y	0	$\searrow$		$\nearrow$

よって，

$$a_1=\sqrt{10},\ b_1=\log_{10}a_1=\frac{1}{2}.\ \cdots(答)$$

(2) $y=\dfrac{1}{3}x^3-10a_nx$ について，

$$y'=x^2-10a_n$$

であり，$a_n>0$ であるから，y の $x\geqq 0$ における増減は次の通り．

x	0	$\cdots$	$\sqrt{10a_n}$	$\cdots$
y'		$-$	0	$+$
y	0	$\searrow$		$\nearrow$

よって，

$$a_{n+1}=\sqrt{10a_n}.\ \cdots(答)$$

(3) (2)の結果より，

$$\begin{aligned}\log_{10}a_{n+1}&=\log_{10}\sqrt{10a_n}\\&=\log_{10}\sqrt{10}+\log_{10}\sqrt{a_n}\\&=\frac{1}{2}\log_{10}a_n+\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

よって，

$$b_{n+1}=\frac{1}{2}b_n+\frac{1}{2}.\ \cdots(答)$$

(4) (3)の結果より，

$$b_{n+1}-1=\frac{1}{2}(b_n-1)$$

であるから，

$$\begin{aligned}b_n-1&=(b_1-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\\&=-\left(\frac{1}{2}\right)^n.\end{aligned}$$

よって，

$$b_n=-\left(\frac{1}{2}\right)^n+1.\ \cdots(答)$$

(5) (4)の結果より，

$$b_1+b_2+b_3=-\left(\frac{1}{2}\right)^1-\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^3+3$$

であるから，

$$\log_{10}a_1+\log_{10}a_2+\log_{10}a_3=\frac{17}{8}$$

すなわち

$$\log_{10}a_1a_2a_3=\frac{17}{8}.$$

よって，

$$a_1a_2a_3=10^{\frac{17}{8}}$$

であるから，

$$\frac{a_1a_2a_3}{100}=10^{\frac{1}{8}}.\ \cdots(答)$$

2

(1)　求めるnはサイコロの目の

$$1,\ 2,\ 3,\ 4(=2^2),\ 5,\ 6(=2\cdot 3)$$

の最小公倍数である．

よって，

$$n=2^2\cdot 3\cdot 5=60. \qquad \cdots(答)$$

(2)　$n=1$のときは不適であり，nが素数のときも素数の正の約数の個数は2であるから不適である．

1と素数を除く自然数nに対して，出た目がnの約数となるサイコロの目とそのときの確率を，nが小さい順に調べると表のようになる．

n	サイコロの目	確率
4	1, 2, 4	$\frac{1}{2}$
6	1, 2, 3, 6	$\frac{2}{3}$
8	1, 2, 4	$\frac{1}{2}$
9	1, 3	$\frac{1}{3}$
10	1, 2, 5	$\frac{1}{2}$
12	1, 2, 3, 4, 6	$\frac{5}{6}$

表より，求める最小のnは，

$$n=12. \qquad \cdots(答)$$

(3)　1個のサイコロを3回投げたときの出た目を順にa, b, cとする．

このとき，目の出方は全部で

$$6^3=216\ （通り）$$

あり，これらは同様に確からしい．

このうち，積abcが$20(=2^2\cdot 5)$の約数となる目の組合せと組$(a,\ b,\ c)$の数は次の表のようになる．

積	目の組合せ	組の数
1	{1, 1, 1}	1
2	{1, 1, 2}	3
4	{1, 1, 4}, {1, 2, 2}	$3+3=6$
5	{1, 1, 5}	3
10	{1, 2, 5}	$3!=6$
20	{1, 4, 5}, {2 2, 5}	$3!+3=9$

よって，求める確率は，

$$\frac{1+3+6+3+6+9}{216}=\frac{7}{54}. \qquad \cdots(答)$$

3.

$$C: y = ax^2 + bx + c$$
$$l_1: y = -3x + 3$$
$$l_2: y = x + 3$$

(1) C と l_1 の式から y を消去して，整理すると，

$$ax^2 + (b+3)x + c - 3 = 0. \cdots ①$$

C と l_2 の式から y を消去して，整理すると，

$$ax^2 + (b-1)x + c - 3 = 0. \cdots ②$$

①,② の判別式をそれぞれ D_1, D_2 とすると，条件より，$D_1 = 0$ かつ $D_2 = 0$ であるから，

$$\begin{cases} (b+3)^2 - 4a(c-3) = 0, & \cdots ③ \\ (b-1)^2 - 4a(c-3) = 0 & \cdots ④ \end{cases}$$

が成り立つ．

③−④ より，

$$(b+3)^2 - (b-1)^2 = 0.$$
$$8(b+1) = 0.$$
$$b = -1. \quad \cdots(答)$$

これを④に代入して，

$$4 - 4a(c-3) = 0.$$
$$c = \frac{1}{a} + 3. \quad \cdots(答)$$

(2) (1)の結果から，

$$C: y = ax^2 - x + \frac{1}{a} + 3. \cdots ⑤$$

C の式で $y=0$ とすると，

$$ax^2 - x + \frac{1}{a} + 3 = 0. \cdots ⑥$$

⑥の判別式を D_3 とすると，条件より，$D_3 > 0$ であるから，

$$(-1)^2 - 4a\left(\frac{1}{a} + 3\right) > 0.$$
$$1 - 4 - 12a > 0.$$
$$3 + 12a < 0.$$

両辺を $a^2 (>0)$ で割ると，

$$3\left(\frac{1}{a}\right)^2 + 12 \cdot \frac{1}{a} < 0.$$
$$3 \cdot \frac{1}{a}\left(\frac{1}{a} + 4\right) < 0.$$

したがって，$\frac{1}{a}$ のとり得る値の範囲は，

$$-4 < \frac{1}{a} < 0. \cdots ⑦ \cdots(答)$$

(3) (1)の結果から，①,②はそれぞれ

$$a\left(x + \frac{1}{a}\right)^2 = 0,\quad a\left(x - \frac{1}{a}\right)^2 = 0$$

となるから，

$$P\left(-\frac{1}{a},\ 3 \cdot \frac{1}{a} + 3\right),\ Q\left(\frac{1}{a},\ \frac{1}{a} + 3\right).$$

また，⑤より，

$$y = a\left(x - \frac{1}{2a}\right)^2 + \frac{3}{4a} + 3$$

であるから，

$$R\left(\frac{1}{2a},\ \frac{3}{4a} + 3\right).$$

$G(X, Y)$ とすると，G は $\triangle PQR$ の重心であるから，

$$X = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{2a}\right) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{a}. \cdots ⑧$$
$$Y = \frac{1}{3}\left\{\left(3 \cdot \frac{1}{a} + 3\right) + \left(\frac{1}{a} + 3\right) + \left(\frac{3}{4a} + 3\right)\right\} = \frac{19}{12} \cdot \frac{1}{a} + 3. \cdots ⑨$$

⑧より，

$$\frac{1}{a} = 6X.$$

これを⑦,⑨に代入して，

$$-4 < 6X < 0,\ Y = \frac{19}{12} \cdot 6X + 3.$$
$$-\frac{2}{3} < X < 0,\ Y = \frac{19}{2}X + 3.$$

したがって，求める軌跡は，

$$線分\ y = \frac{19}{2}x + 3\ \left(-\frac{2}{3} < x < 0\right). \cdots(答)$$