1

正の実数 α に対して，関数 $f(x)$ を

$$f(x)=x+\sqrt{\alpha-x^2}\quad(0\leqq x\leqq\sqrt{\alpha})$$

とすると，

$$\begin{aligned}f'(x)&=1-\frac{x}{\sqrt{\alpha-x^2}}\\&=\frac{\sqrt{\alpha-x^2}-x}{\sqrt{\alpha-x^2}}\cdot\frac{\sqrt{\alpha-x^2}+x}{\sqrt{\alpha-x^2}+x}\\&=\frac{(\sqrt{\alpha}+\sqrt{2}x)(\sqrt{\alpha}-\sqrt{2}x)}{\sqrt{\alpha-x^2}\left(\sqrt{\alpha-x^2}+x\right)}.\end{aligned}$$

$0<x<\sqrt{\alpha}$ において，

$$\sqrt{\alpha-x^2}\left(\sqrt{\alpha-x^2}+x\right)>0,\ \sqrt{\alpha}+\sqrt{2}x>0$$

であるから，$0\leqq x\leqq\sqrt{\alpha}$ における $f(x)$ の増減は次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\sqrt{\dfrac{\alpha}{2}}$	$\cdots$	$\sqrt{\alpha}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

よって，$f(x)$ が最大値をとるときの x の値は，

$$x=\sqrt{\frac{\alpha}{2}}.$$

(1)　$f(x)$ において $\alpha=c$ とすることで，

$$a_1=\sqrt{\frac{c}{2}}.\quad\cdots\text{(答)}$$

(2)　$f(x)$ において $\alpha=a_n$ とすることで，

$$a_{n+1}=\sqrt{\frac{a_n}{2}}.$$

この両辺は正より，底 2 の対数をとると，

$$\log_2 a_{n+1}=\log_2\sqrt{\frac{a_n}{2}}$$

すなわち，

$$\log_2 a_{n+1}=\frac{1}{2}\log_2 a_n-\frac{1}{2}.$$

よって，$b_n=\log_2 a_n$ とすると，

$$b_{n+1}=\frac{1}{2}b_n-\frac{1}{2}.\quad\cdots\text{(答)}$$

(3)　$b_n=\log_2 a_n$ のとき，(1) の結果より，

$$b_1=\log_2 a_1=\frac{1}{2}\log_2 c-\frac{1}{2}.$$

また，(2) の結果より，

$$b_{n+1}+1=\frac{1}{2}(b_n+1).$$

よって，数列 $\{b_n+1\}$ は，

初項 $b_1+1=\dfrac{1}{2}\log_2 c+\dfrac{1}{2}$，

公比 $\dfrac{1}{2}$

の等比数列であるから，

$$b_n+1=\left(\frac{1}{2}\log_2 c+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

したがって，

$$b_n=(\log_2 c+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n-1.\quad\cdots\text{(答)}$$

2

$C: y=ax^2+bx+c$

$l_1: y=-3x+3$

$l_2: y=x+3$

(1) C と l_1 の式から y を消去して，整理すると，

$$ax^2+(b+3)x+c-3=0. \cdots ①$$

C と l_2 の式から y を消去して，整理すると，

$$ax^2+(b-1)x+c-3=0. \cdots ②$$

①,② の判別式をそれぞれ D_1, D_2 とすると，条件より，$D_1=0$ かつ $D_2=0$ であるから，

$$\begin{cases}(b+3)^2-4a(c-3)=0, & \cdots ③\\ (b-1)^2-4a(c-3)=0 & \cdots ④\end{cases}$$

が成り立つ．

③−④より，

$$(b+3)^2-(b-1)^2=0.$$

$$8(b+1)=0.$$

$$b=-1. \qquad \cdots(答)$$

これを④に代入して，

$$4-4a(c-3)=0.$$

$$c=\frac{1}{a}+3. \qquad \cdots(答)$$

(2) (1)の結果から，

$$C: y=ax^2-x+\frac{1}{a}+3. \cdots ⑤$$

C の式で $y=0$ とすると，

$$ax^2-x+\frac{1}{a}+3=0. \cdots ⑥$$

⑥の判別式を D_3 とすると，条件より，$D_3>0$ であるから，

$$(-1)^2-4a\left(\frac{1}{a}+3\right)>0.$$

$$1-4-12a>0.$$

$$3+12a<0.$$

両辺を $a^2\,(>0)$ で割ると，

$$3\cdot\left(\frac{1}{a}\right)^2+12\cdot\frac{1}{a}<0.$$

$$3\cdot\frac{1}{a}\left(\frac{1}{a}+4\right)<0.$$

したがって，$\frac{1}{a}$ のとり得る値の範囲は，

$$-4<\frac{1}{a}<0. \cdots ⑦ \cdots(答)$$

(3) (1)の結果から，①,②はそれぞれ

$$a\left(x+\frac{1}{a}\right)^2=0,\quad a\left(x-\frac{1}{a}\right)^2=0$$

となるから，

$$P\left(-\frac{1}{a},\ 3\cdot\frac{1}{a}+3\right),\ Q\left(\frac{1}{a},\ \frac{1}{a}+3\right).$$

また，⑤より，

$$y=a\left(x-\frac{1}{2a}\right)^2+\frac{3}{4a}+3$$

であるから，

$$R\left(\frac{1}{2a},\ \frac{3}{4a}+3\right).$$

$G(X, Y)$ とすると，G は $\triangle PQR$ の重心であるから，

$$X=\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{2a}\right)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{a}. \cdots ⑧$$

$$Y=\frac{1}{3}\left\{\left(3\cdot\frac{1}{a}+3\right)+\left(\frac{1}{a}+3\right)+\left(\frac{3}{4a}+3\right)\right\}=\frac{19}{12}\cdot\frac{1}{a}+3. \cdots ⑨$$

⑧より，

$$\frac{1}{a}=6X.$$

これを⑦,⑨に代入して，

$$-4<6X<0,\ Y=\frac{19}{12}\cdot 6X+3.$$

$$-\frac{2}{3}<X<0,\ Y=\frac{19}{2}X+3.$$

したがって，求める軌跡は，

$$\text{線分 } y=\frac{19}{2}x+3\ \left(-\frac{2}{3}<x<0\right). \cdots(答)$$

3

(1)　求めるnのうち最小のものはサイコロの目の

$$1,\ 2,\ 3,\ 4(=2^2),\ 5,\ 6(=2\cdot 3)$$

の最小公倍数の

$$n=2^2\cdot 3\cdot 5=60$$

である．

よって，60の正の倍数を小さい順に3つ求めて，

$$n=60,\ 120,\ 180.$$

…(答)

(2)　$n=1$のときは不適であり，nが素数のときも素数の正の約数の個数は2であるから不適である．

1と素数を除く自然数nを小さい順に書き並べると，

$$4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10,\ 12,\ 14,\ 15,\ 16,\ 18,$$
$$20,\ 21,\ 22,\ 24,\ 25,\ 26,\ 27,\ 28,$$
$$30,\ 32,\ 33,\ 34,\ 35,\ 36,\ \cdots$$

であり，このうち条件を満たすものを3つ求めて，

$$n=12,\ 24,\ 30.$$

…(答)

(3)　1個のサイコロを3回投げたときの出た目を順にa, b, cとする．

このとき，目の出方は全部で

$$6^3=216\ （通り）$$

あり，これらは同様に確からしい．

このうち，積abcが$160(=2^5\cdot 5)$の約数となる目の組合せと組$(a,\ b,\ c)$の数は次の表のようになる．

	目の組合せ	組の数
1	{1, 1, 1}	1
2	{1, 1, 2}	3
4	{1, 1, 4}, {1, 2, 2}	$3+3=6$
5	{1, 1, 5}	3
8	{1, 2, 4}, {2, 2, 2}	$3!+1=7$
10	{1, 2, 5}	$3!=6$
16	{1, 4, 4}, {2 2, 4}	$3+3=6$
20	{1, 4, 5}, {2 2, 5}	$3!+3=9$
32	{2, 4, 4}	3
40	{2, 4, 5}	$3!=6$
80	{4, 4, 5}	3
160	なし	0

よって，求める確率は，

$$\frac{1+3+6+3+7+6+6+9+3+6+3}{216}=\frac{53}{216}.$$

…(答)

4

(1)X_1 は，半径 2 (AC)，高さ 1 (CG) の円柱であるから，

$$V_1=\pi\cdot 2^2\cdot 1=4\pi. \qquad \cdots(\text{答})$$

また，X_2 は，半径 $\sqrt{3}$ (BG)，高さ $\sqrt{2}$ (AB) の円柱であるから，

$$V_2=\pi\cdot(\sqrt{3})^2\cdot\sqrt{2}=3\sqrt{2}\pi. \qquad \cdots(\text{答})$$

(2) 平面 $x=t$ と線分 EF の共有点を P とおくと，$0\leqq t\leqq 1$ より点 P は線分 EF を $1-t : t$ に内分する点である．

よって，E(1, 0, 1)，F(0, 1, 1) より，求める点 P の座標は，

$$(t,\ 1-t,\ 1). \qquad \cdots(\text{答})$$

(3) 平面 $x=t$ $(0\leqq t\leqq 1)$ と線分 EF，線分 EH，x 軸の共有点をそれぞれ P, Q, R とおく．

2 点 P, Q は正方形の対角線 EG に関して対称であるから，

$$\mathrm{RP}=\mathrm{RQ}$$

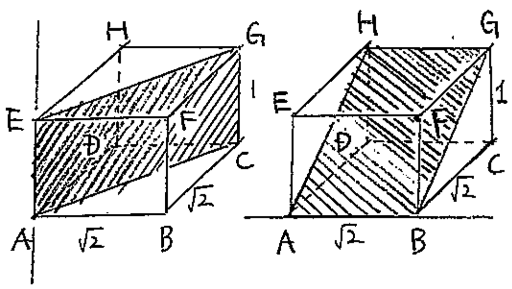
である．

よって，X_3 の $x\geqq 0$ の部分の平面 $x=t$ による切り口は，R$(t,\ 0,\ 0)$ を中心とする半径 RP の円である．

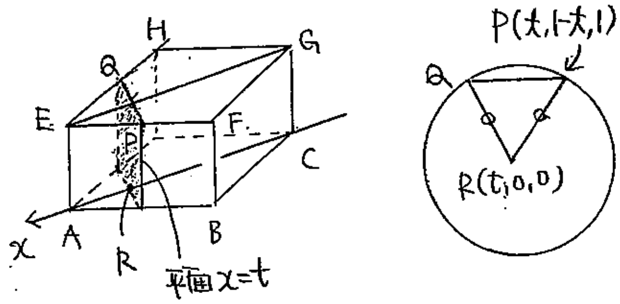
また，X_3 は平面 BFHD に関して対称であるから，求める体積 V_3 は，

$$\begin{aligned} V_3&=2\pi\int_0^1(\mathrm{RP})^2dt\\ &=2\pi\int_0^1\{(t-1)^2+1\}dt\\ &=2\pi\left[\frac{1}{3}(t-1)^3+t\right]_0^1\\ &=2\pi\left(1+\frac{1}{3}\right)\\ &=\frac{8}{3}\pi. \qquad \cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

(1) の参考図



(3) の参考図



5

(1)　$0 \leqq \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数 α に対して，

$$f(\tan\alpha)=\frac{1}{2}\int_{-\tan\alpha}^{\tan\alpha}\frac{1}{1+u^2}du.$$

$u=\tan\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，

$$\frac{du}{d\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta=1+u^2$$

であり，$-\tan\alpha=\tan(-\alpha)$，$-\dfrac{\pi}{2}<-\alpha\leqq 0$ に注意して，

u	$-\tan\alpha \to \tan\alpha$
θ	$-\alpha \to \alpha$

よって，

$$f(\tan\alpha)=\frac{1}{2}\int_{-\alpha}^{\alpha}d\theta=\frac{1}{2}\Big[\theta\Big]_{-\alpha}^{\alpha}=\alpha.\ \cdots(答)$$

(2)　$0 \leqq x \leqq 1$ を満たす実数 x に対して，

$$0\leqq\alpha<\frac{\pi}{2}\quad かつ\quad x=\tan\alpha$$

を満たす実数 α をとると，(1) より，

$$\tan\{f(x)\}=\tan\{f(\tan\alpha)\}=\tan\alpha=x.$$

さらに，$-x\leqq u\leqq x$ に対して，$\dfrac{1}{1+u^2}\geqq 0$ より，

$$f(x)=\frac{1}{2}\int_{-x}^{x}\frac{1}{1+u^2}du\geqq 0.$$

同様に，$0\leqq y\leqq 1$ を満たす実数 y に対して，

$$\tan\{f(y)\}=y\quad かつ\quad f(y)\geqq 0.$$

また，(1) より，

$$f(1)=f\left(\tan\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}.$$

よって，$0\leqq x\leqq 1$，$0\leqq y\leqq 1$ の下で，次の同値が成り立つ．

$f(x)+f(y)\leqq f(1)$

$\Longleftrightarrow\ \tan\{f(x)+f(y)\}\leqq\tan\{f(1)\}$

$\left(なぜなら，\tan\theta\left(0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)は単調増加\right)$

$\Longleftrightarrow\ \dfrac{\tan\{f(x)\}+\tan\{f(y)\}}{1-\tan\{f(x)\}\tan\{f(y)\}}\leqq\tan\{f(1)\}$

$\Longleftrightarrow\ \dfrac{x+y}{1-xy}\leqq 1$

$\Longleftrightarrow\ x+y\leqq 1-xy$

$\Longleftrightarrow\ (x+1)(y+1)\leqq 2$

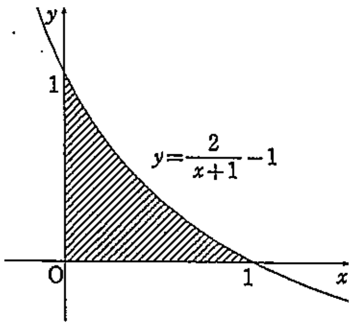
$\Longleftrightarrow\ y+1\leqq\dfrac{2}{x+1}$

$\Longleftrightarrow\ y\leqq\dfrac{2}{x+1}-1.$

よって，与えられた領域は，

$$0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq 1,\ y\leqq\frac{2}{x+1}-1$$

を満たす点 (x, y) の集合で，次の図の斜線部分（境界含む）．



また，この領域の面積は，

$$\int_0^1\left(\frac{2}{x+1}-1\right)dx=\Big[2\log(x+1)-x\Big]_0^1=2\log 2-1.\ \cdots(答)$$